Analyse harmonique associée à des systèmes de racines et aux opérateurs de Dunkl rationnels

Luc Deleaval

Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Luc Deléaval

Analyse harmonique associée à des systèmes de racines et aux opérateurs de Dunkl rationnels

---

dirigée par Sami Mustapha

Soutenue le 7 décembre 2010 devant le jury composé de :

Jacques FARAUT	Université Paris 6	
Gilles GODEFROY	Université Paris 6	
Piotr GRACZYK	Université d'Angers	Rapporteur
Sophie GRIVAUX	Université Lille 1	
Sami MUSTAPHA	Université Paris 6	Directeur
Krzysztof STEMPAK	Université de Wroclaw	Rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du chevaleret
75 013 Paris

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

À ma famille,
et plus particulièrement à mes parents,
et plus particulièrement encore à Juliette.

Remerciements

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse Sami Mustapha. Il n'a pas simplement accepté de diriger ma thèse ; il m'a transmis la passion de la recherche mathématique et n'a eu de cesse de m'encourager et de me soutenir durant ces trois années. J'ai pu apprécier non seulement sa dimension mathématique, mais aussi sa non moins importante dimension humaine. J'en profite pour lui exprimer ici ma plus profonde gratitude.

Je remercie très sincèrement Piotr Graczyk et Krzysztof Stempak d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Merci tout particulièrement à Piotr Graczyk pour son invitation à Angers et ses précieuses remarques.

Je suis très honoré que Jacques Faraut et Gilles Godefroy, deux mathématiciens dont la carrière est impressionnante, aient accepté de faire partie de mon jury. C'est également un très grand honneur d'avoir comme membre du jury Sophie Grivaux, dont la gentillesse n'a d'égal que ses immenses compétences mathématiques.

Je tiens également à remercier Jean-Philippe Anker pour son invitation à présenter mes travaux à Orléans, ainsi que Nizar Demni avec qui j'ai longuement échangé sur les opérateurs de Dunkl. Merci également à Margit Rösler pour l'interêt qu'elle a porté à mon travail.

Je souhaite remercier très chaleureusement Julien Grivaux. Il est difficile de trouver des qualificatifs assez forts pour souligner sa gentillesse, son humilité et sa patience à prodiguer des conseils pertinents.

Durant ces trois années de thèse, j'ai eu la chance de côtoyer à Chevaleret et à Jussieu de nombreuses personnes attachantes : que toutes soient remerciées pour les bons moments partagés. Je pense notamment (pardon à ceux que j'oublie) à Cécile, Clémence, Dimitri, Élodie, Fabien, François, Ismaël, Manu, Robert. Je voudrais remercier plus particulièrement Banafsheh (que je n'ai jamais eu le temps d'écouter au piano), Benjamin (et ses compétences informatiques), Jerôme (pour sa science administrative), Maxime (et son côté apaisant), Mirjam (au bel accent allemand) et Mounir (pour son optimisme toujours rassurant).

Enfin, je souhaite remercier ma famille et ma belle famille pour leur soutien constant. Cette thèse, aboutissement de longues années d'études, je la dois beaucoup à mes sœurs et à mes parents exceptionnels avec qui j'ai vécu dans un climat toujours serein, à l'abri de tous soucis affectifs. Il m'est impossible de trouver des mots pour dire à quel point je suis fier d'eux, et à quel point je les aime. Pour conclure, je souhaite bien évidemment remercier mon extraordinaire femme Juliette (et notre petit amour qui grandit en elle) qui m'épaule maintenant depuis 6 ans et sans qui rien n'aurait été possible. Ma Ju, cette thèse t'est dédiée.

Résumé

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'analyse harmonique et aux fonctions spéciales associées aux opérateurs de Dunkl rationnels qui sont des déformations des dérivées directionnelles par des réflexions. Ils fournissent un outil décisif pour étendre, dans le cadre des systèmes de racines et des groupes de réflexions associés, l'analyse de Fourier euclidienne et l'analyse sur les espaces symétriques riemanniens plats.

Après avoir donné un panorama détaillé de la théorie de Dunkl, on étudie l'opérateur maximal défini dans ce contexte. On commence par apporter des améliorations sur le comportement des constantes du théorème maximal de Thangavelu et Xu pour un groupe de réflexions quelconque. On étend ensuite dans un cadre vectoriel leur théorème en établissant dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$ des inégalités de Fefferman-Stein. Pour y parvenir et puisque les techniques d'analyse réelle ne se prêtent pas à cet opérateur maximal, on construit un opérateur de type Hardy-Littlewood plus commode à étudier. À cet effet, on donne une estimation fine de la translation généralisée de l'indicatrice d'une boule.

Notre étude est ensuite consacrée à des résultats d'intégrabilité exponentielle qui complètent les inégalités de Fefferman-Stein, et à un théorème maximal vectoriel pour des hypergroupes de Bessel-Kingman.

Enfin, on développe l'analyse de Dunkl dans le cas d'un sous-système positif de racines orthogonales. On y établit une formule explicite du noyau de Dunkl et une formule produit qui implique le caractère borné de la translation de Dunkl. Le cas particulier d'un système de type $\mathcal{A}_1$ est étudié afin d'établir une égalité liant les fonctions de Bessel normalisées et les polynômes de Gegenbauer.

Mots-clefs

Systèmes de racines ; Opérateurs de Dunkl rationnels ; Opérateur maximal de Dunkl ; Inégalités de Fefferman-Stein ; Analyse harmonique ; Analyse réelle ; Fonctions spéciales.

Harmonic analysis associated with root systems and Dunkl rational operators

Abstract

In this thesis, we focus on harmonic analysis and special functions associated with rational Dunkl operators which are deformations by reflections of directional derivatives. They provide an essential tool to extend, in the setting of root systems and associated reflection groups, Fourier analysis on Euclidean spaces and analysis on Riemannian symmetric spaces of Euclidean type.

After a detailed survey on Dunkl theory, we study the maximal operator defined in this setting. We begin with some improvements on the behavior of the constants of the maximal theorem proved by Thangavelu and Xu for a general reflection group. We then extend their theorem to the vector-valued case by establishing Fefferman-Stein inequalities in the case $\mathbb{Z}_2^d$. In order to prove this theorem, we construct an operator of Hardy-Littlewood type on which, contrary to the Dunkl maximal operator, we can apply the methods of real analysis. In particular, we give a sharp estimate of the generalised translation of the characteristic function of a ball.

Afterwards, our study is devoted to some results on exponential integrability which completes the Fefferman-Stein inequalities, and to a vector-valued maximal theorem for Bessel-Kingman hypergroups.

Finally, we develop the Dunkl analysis in the case of a positive subsystem of orthogonal roots. We give an explicit formula of the Dunkl kernel and a product formula which implies that the Dunkl translation is a bounded operator. We also focus on the particular case of a root system of $\mathcal{A}_1$ type in odrer to give an equality which links normalized Bessel functions and Gegenbauer polynomials.

Keywords

Root systems; Rational Dunkl operators; Dunkl maximal operator; Fefferman-Stein inequalities; Harmonic analysis; Real analysis; Special functions.

Table des matières

Introduction

Dans cette thèse, on s'intéresse à divers objets associés aux opérateurs de Dunkl rationnels, en se focalisant principalement sur l'opérateur maximal de Dunkl et, dans une moindre mesure, sur le noyau et la translation de Dunkl. Notre étude se situe donc dans la partie analytique de ce que l'on appelle communément théorie de Dunkl rationnelle, cette théorie trouvant sa meilleure expression dans l'analyse harmonique et les fonctions spéciales associées à des systèmes de racines d'un espace euclidien.

0.1 Motivation

Introduits en 1989 par Charles Dunkl sous le nom d'opérateurs différentiels-différences, les opérateurs de Dunkl rationnels sont, schématiquement, des déformations par des réflexions des dérivées directionnelles usuelles, ces déformations faisant intervenir un paramètre κ (la fonction de multiplicité) qui peut varier continûment dans $\mathbb{C}$. La principale force de ces opérateurs est qu'ils forment une algèbre commutative d'opérateurs qui généralise l'algèbre des opérateurs différentiels invariants d'un espace symétrique riemannien.

Initialement construits dans le but d'établir une théorie des polynômes orthogonaux et des harmoniques sphériques pour des mesures invariantes sous l'action de groupes de réflexions, ces opérateurs se sont révélés décisifs dans le développement de l'analyse harmonique et des fonctions spéciales à plusieurs variables et ce, en ne travaillant non plus avec des groupes de Lie et leurs représentations, mais avec des groupes de réflexions finis. En effet, ils contribuent à généraliser de manière considérable l'analyse harmonique euclidienne et l'analyse sur les espaces symétriques riemanniens de type euclidien, avec lesquelles la théorie de Dunkl coïncide respectivement dans le cas où la fonction de multiplicité est nulle et dans le cas où la fonction de multiplicité ne prend que certaines valeurs entières positives. On peut indiquer à titre d'exemple que les opérateurs de Dunkl permettent de construire une isométrie (sur l'espace des fonctions de carré intégrable pour une mesure invariante sous l'action d'un groupe de réflexions), la transformation de Dunkl, qui s'avère capitale pour généraliser l'analyse de Fourier euclidienne. On peut aussi souligner le fait qu'ils permettent de définir une fonction de Bessel généralisée (le noyau de Dunkl symétrisé) qui étend la notion de fonction sphérique d'un espace symétrique riemannien de type euclidien en une notion de fonction hypergéométrique multivariée.

La théorie de Dunkl rationnelle est à mettre également en parallèle (même si nous ne l'aborderons pas dans cette thèse) avec la théorie de Dunkl trigonométrique développée essentiellement par Heckman et Opdam il y a vingt ans environ, et à laquelle Cherednik a grandement contribué depuis. La principale motivation de Heckman et Opdam était de généraliser la théorie des fonctions sphériques de Harish-Chandra dans le but d'établir une théorie des fonctions hypergéométriques multivariées. Les difficultés rencontrées dans leur entreprise ont été partiellement résolues lorsque Heckman a fait le lien avec les opérateurs de Dunkl rationnels qui ont fourni un moyen simple pour construire des équations différentielles vérifiées par les fonctions hypergéométriques multivariées. Cependant, les opérateurs qu'il utilisait, contrairement à ceux de Dunkl, ne commutaient pas. C'est avec la découverte par Cherednik, grâce à ses travaux en lien avec les algèbres de Hecke doublement affines et les équations de Knizhnik-Zamolodchikov, des opérateurs de Dunkl trigonométriques (ou opérateurs de Dunkl-Cherednik) que cette théorie a connu un essor considérable, englobant en partie la théorie de Dunkl rationnelle.

On peut enfin signaler que les opérateurs de Dunkl rationnels constituent également un outil important en physique mathématique d'une part, notamment dans l'étude de l'intégrabilité des opérateurs hamiltoniens de certains modèles particulaires de Calogero-Moser-Sutherland, et en probabilités d'autre part, plus précisément pour l'étude de processus stochastiques dans des chambres de Weyl.

0.2 Présentation du cadre de travail et de la problématique

Un des principaux buts de cette thèse est de développer l'analyse harmonique (plus particulièrement une théorie des fonctions maximales) associée à des systèmes de racines. Pour en cerner les enjeux et les problèmes, il est indispensable de présenter certains objets liés aux opérateurs de Dunkl rationnels. De plus amples informations seront données dans le premier chapitre de la présente thèse.

Soit $\mathcal{R}$ un système de racines réduit non nécessairement cristallographique et soit W le groupe de réflexions associé, qui est fini et que l'on fait agir sur un espace euclidien, disons $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, l'opérateur de Dunkl rationnel $T_\xi^{\mathcal{R},\kappa}$ est défini ([16]) pour f suffisamment régulière par

$$T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} f(x) = \partial_\xi f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \kappa(\alpha) \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle x, \alpha \rangle} \langle \xi, \alpha \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où $\mathcal{R}_+$ désigne un sous-système positif de $\mathcal{R}$, κ une fonction de multiplicité associée à $\mathcal{R}$, c'est-à-dire une fonction invariante sous l'action de W (que l'on suppose dans toute cette introduction à valeurs positives ou nulles), et σ_α la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à la droite portée par α. Ces opérateurs, qui coïncident avec les dérivées directionnelles usuelles ∂_ξ dans le cas où la fonction de multiplicité est nulle, sont indépendants du choix de $\mathcal{R}_+$ du fait même de la définition de κ. La propriété absolument remarquable de ces opérateurs de Dunkl rationnels est le fait qu'ils commutent.

Théorème 0.1 (Dunkl [16]). *Soit $\mathcal{R}$ un système de racines et soit κ une fonction de multiplicité associée à ce système. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et tout $\xi' \in \mathbb{R}^d$ on a alors*

$$T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} T_{\xi'}^{\mathcal{R},\kappa} = T_{\xi'}^{\mathcal{R},\kappa} T_\xi^{\mathcal{R},\kappa}.$$

Cette propriété sous-tend bien évidemment une structure analytique riche et amène naturellement à considérer le problème des fonctions propres, c'est-à-dire que l'on cherche pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé toutes les fonctions solutions du système

$$(\mathcal{E}) : \begin{cases} T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} f & = \langle x, \xi \rangle f \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \\ f(0) & = 1. \end{cases}$$

Cette question a été résolue par Opdam.

Théorème 0.2 (Opdam [38])**.** *Il existe une unique fonction $E_\kappa^W(x,\cdot)$ analytique réelle solution du système $(\mathcal{E})$. De plus, E_κ^W s'étend holomorphiquement à $\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d$ et est appelée le noyau de Dunkl.*

En fait, l'existence de solutions du système $(\mathcal{E})$ avait déjà été demontrée par Dunkl en 1991 ([18]) au moyen d'un opérateur V_κ^W qui entrelace l'algèbre des opérateurs de Dunkl rationnels et l'algèbre des dérivées directionnelles usuelles, c'est-à-dire qui vérifie entre autres $T_\xi^{\mathcal{R},\kappa}V_\kappa^W = V_\kappa^W\partial_\xi$. Dunkl avait alors été naturellement amené à poser $E_\kappa^W(x,\cdot)(y) = V_\kappa^W(\mathrm{e}^{\langle x,\cdot\rangle})(y)$.
Un des problèmes majeurs de la théorie est le fait qu'une formule explicite de l'opérateur d'entrelacement n'est, en toute généralité, pas connue. Les seuls cas connus pour V_κ^W sont à l'heure actuelle le cas unidimensionnel, c'est-à-dire pour $W\simeq\mathbb{Z}_2$ ([18]), le cas $W\simeq\mathbb{Z}_2^d$ ([60]), les cas d'un système de racines de type $\mathcal{A}_2$ et de type $\mathcal{B}_2$ ([20, 21]) et plus récemment, le cas d'un sous-système positif de racines deux à deux orthogonales ([34]). On dispose tout de même, grâce à Rösler notamment ([41]), de résultats abstraits mais significatifs, comme la positivité de V_κ^W et une représentation intégrale de cet opérateur d'entrelacement au moyen de mesures de probabilités.

Bien qu'il ne soit connu explicitement que dans très peu de cas, on sait néanmoins que le noyau de Dunkl a de nombreuses propriétés en commun avec l'exponentielle classique (fonction à laquelle il se réduit dans le cas $\kappa=0$). On peut par exemple préciser que pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et tout $y\in\mathbb{R}^d$, $|E_\kappa^W(ix,y)|\leqslant 1$ ([41]).
Le noyau de Dunkl permet surtout de définir une transformation intégrale, la transformation de Dunkl, que l'on note $\mathcal{F}_\kappa^W$ et qui est donnée ([19] et [10]) pour $f\in L^1(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$ par

$$\mathcal{F}_\kappa^W(f)(x) = c_\kappa^W\int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(-ix,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y),\quad x\in\mathbb{R}^d,$$

où μ_κ^W est une mesure de Lebesgue à poids invariant sous l'action de W et c_κ^W une constante de normalisation. Le noyau E_κ^W est à la transformation de Dunkl ce que l'exponentielle classique est à la transformation de Fourier euclidienne (avec laquelle $\mathcal{F}_\kappa^W$ coïncide dans le cas où la fonction de multiplicité est nulle).
Cette transformation intégrale s'avère être un précieux outil pour généraliser l'analyse de Fourier dans le cadre de l'analyse associée à des systèmes de racines. On dispose notamment d'une formule d'inversion et d'un théorème de Plancherel.

Théorème 0.3 (Dunkl [19] – de Jeu [10])**.**

1. *Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$. Si $\mathcal{F}_\kappa^W(f)\in L^1(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$, alors on a la formule d'inversion suivante*

$$f(x) = c_\kappa^W\int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(ix,y)\mathcal{F}_\kappa^W(f)(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y)$$

pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$.

2. *La transformation de Dunkl s'étend uniquement en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$.*

Puisque l'analogie avec l'analyse de Fourier est grande et puisque l'opérateur de translation usuel $\tau_x : f\mapsto f(\cdot+x)$ joue un rôle essentiel en analyse de Fourier, il est naturel de définir un opérateur de translation généralisé (la translation de Dunkl) au moyen de la transformation de Dunkl, en mimant l'action de la transformation de Fourier sur l'opérateur classique. Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, cette translation généralisée $f\mapsto\tau_x^{W,\kappa}f$ est donc définie sur $L^2(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$ par l'équation

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\tau_x^{W,\kappa}f)(y)=E_\kappa^W(ix,y)\mathcal{F}_\kappa^W(f)(y),\quad y\in\mathbb{R}^d.$$

D'après le théorème de Plancherel et le fait que $|E_\kappa^W(ix,y)|\leqslant 1$, on a immédiatement la propriété que l'opérateur $\tau_x^{W,\kappa}$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$.

Le caractère $L^p(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$-borné de la translation de Dunkl (pour $1\leqslant p\leqslant+\infty, p\neq 2$) demeure quant à lui, en toute généralité, un problème ouvert. C'est d'ailleurs là une des différences fondamentales avec la translation usuelle. Le résultat le plus général dont on dispose à l'heure actuelle est le suivant, où l'on désigne par $L^p_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$ l'ensemble des fonctions radiales de $L^p(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$.

Théorème 0.4 (Thangavelu-Xu [56]). *Pour tout p vérifiant $1\leqslant p\leqslant 2$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, la translation de Dunkl $\tau_x^{W,\kappa}:L^p_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)\to L^p(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$ est un opérateur borné.*

Ce théorème repose en partie sur la formule explicite suivante de la translatée de Dunkl des fonctions radiales suffisamment régulières

$$\tau_x^{W,\kappa}f(y)=V_\kappa^W\Big(F\big(\sqrt{\|x\|^2+\|\cdot\|^2+2\langle x,\cdot\rangle}\big)\Big)(y),$$

où l'on a noté $f(y)=F(\|y\|)$. Cette expression est due à Rösler ([44]). Le seul autre cas connu, également dû à Rösler ([39]), est celui de la dimension un (c'est-à-dire $W\simeq\mathbb{Z}_2$), pour lequel on a

$$\begin{aligned}\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}f(y)=\frac12\int_{-1}^1 f\Big(\sqrt{x^2+y^2+2xyt}\Big)\Big(1+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+2xyt}}\Big)\psi_\kappa(t)\,\mathrm{d}t\\+\frac12\int_{-1}^1 f\Big(-\sqrt{x^2+y^2+2xyt}\Big)\Big(1-\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+2xyt}}\Big)\psi_\kappa(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

avec ψ_κ un poids qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter ici. Cette formule permet d'ailleurs de démontrer que la translation de Dunkl est un opérateur $L^p(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$-borné pour tout $1\leqslant p\leqslant+\infty$.

Une autre difficulté liée à l'opérateur de translation généralisé est qu'il n'est pas, en toute généralité, un opérateur positif, et ce, même en dimension un. Le cas le plus général où l'on peut affirmer qu'il est positif est le suivant.

Théorème 0.5 (Thangavelu-Xu [56]). *Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$ une fonction bornée, radiale et positive. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ on a $\tau_x^{W,\kappa}f\geqslant 0$.*

Même si les mesures μ_κ^W considérées sont doublantes, la structure de l'opérateur de translation généralisé empêche la mise en œuvre des outils d'analyse réelle (recouvrement, inégalité à poids...) en vue, par exemple, de l'étude des opérateurs pseudo-différentiels ou de type intégrale singulière dans le cadre de la théorie de Dunkl. Malgré tout, en utilisant le théorème de Hopf-Dunford-Schwartz, Thangavelu et Xu ont réussi à établir un théorème maximal ([56]) pour l'opérateur maximal de Dunkl M_κ^W associé à un groupe de réflexions quelconque et donné par

$$M_\kappa^W f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)}\Big|\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y)\Big|,$$

où B_r désigne la boule euclidienne ouverte de rayon r centrée en l'origine.

L'un des principaux buts de la thèse est d'étendre ce résultat en établissant des inégalités de Fefferman-Stein, c'est-à-dire un théorème maximal vectoriel pour l'opérateur M_κ^W. Rappelons tout d'abord l'énoncé des inégalités de Fefferman-Stein usuelles, c'est-à-dire pour l'opérateur de Hardy-Littlewood classique M défini par

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, \mathrm{d}y$$

et auquel se réduit l'opérateur maximal de Dunkl (à la position des valeurs absolues près) lorsque la fonction de multiplicité est nulle. On a noté $m(X)$ la mesure de Lebesgue de X et $B_r(x)$ la boule euclidienne ouverte de rayon r centrée en x.

Théorème 0.6 (Fefferman-Stein [24])**.** *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^1$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |Mf_n(x)|^r\right)^{\frac{1}{r}} > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{C}{\lambda} \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_1,$$

où $C = C(d, r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^p$, alors on a*

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |Mf_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_p \leqslant C \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_p,$$

où $C = C(d, p, r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Ce théorème constitue un résultat fondamental en analyse harmonique. En effet, c'est un outil indispensable dès lors que l'on considère des opérateurs à valeurs vectorielles (c'est-à-dire dans des espaces de Banach convenables). La preuve de ce théorème repose essentiellement sur trois arguments : un théorème maximal scalaire et une inégalité à poids pour l'opérateur maximal et une décomposition de Calderón-Zygmund. Cependant, on ne peut pas appliquer cette méthode à M_κ^W et ce, bien que le théorème maximal scalaire pour M_κ^W ait été récemment prouvé par Thangavelu et Xu. D'ailleurs, pour avoir un espoir de parvenir à démontrer des inégalités de Fefferman-Stein en suivant cette stratégie, il faudrait réussir à prouver le théorème maximal scalaire par des techniques de recouvrement et d'interpolation et non en utilisant le théorème ergodique de Hopf-Dunford-Schwartz. Bien évidemment, les problèmes sont dus à la structure de l'opérateur de translation généralisé. On parvient néanmoins à établir un théorème maximal vectoriel dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$. Ce cas particulier a l'avantage de fournir un cadre où la connaissance explicite du noyau de Dunkl (en termes de fonctions de Bessel normalisées) permet de mieux cerner la structure de l'opérateur de translation, sans pour autant permettre l'application directe des outils d'analyse réelle. Le cas $\mathbb{Z}_2^d$ est également intéressant car certaines techniques que l'on y utilise sont transposables dans le cadre des hypergroupes unidimensionnels de Bessel-Kingman. C'est l'article de Rösler ([39]) sur les hypergroupes signés de type Bessel sur $\mathbb{R}$ qui a révélé ce lien et qui a permis de développer depuis lors l'analyse associée à $\mathbb{Z}_2^d$.

0.3 Principaux résultats obtenus

Après un premier chapitre exclusivement composé de rappels permettant d'introduire les définitions et les théorèmes de la théorie de Dunkl qui nous seront utiles dans la thèse, on étudie dans un deuxième chapitre (qui contient entre autres les résultats de [12]) l'opérateur maximal de Dunkl.

On commence par rappeler le théorème maximal prouvé par Thangavelu et Xu ([56]) pour lequel ils ont utilisé le théorème ergodique de Hopf-Dunford-Schwartz. En suivant une stratégie établie par Stein et Strömberg dans le cadre classique ([48]), on montre que ce théorème ergodique permet d'apporter des précisions sur la taille des constantes dans le théorème maximal pour M_κ^W. Plus précisément, dans le cas où $p = 1$, on obtient le résultat de type faible suivant, où l'on note pour simplifier les notations $L^p(\mu_\kappa^W)$ et $\|\cdot\|_{W,\kappa,p}$ plutôt que $L^p(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$ et $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)}$.

Théorème 0.7. *Supposons $\gamma_{\mathcal{R}} > 0$, où $2\gamma_{\mathcal{R}}$ désigne le degré d'homogénéité du poids définissant la mesure μ_κ^W. Alors il existe une constante numérique C telle que pour tout $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$ et pour tout $\lambda > 0$*

$$\mu_\kappa^W\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > \lambda\right\}\right) \leqslant C\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{\lambda}\|f\|_{W,\kappa,1}.$$

Dans le cas où $1 < p \leqslant +\infty$, l'utilisation combinée du théorème ergodique et d'un théorème maximal pour les semi-groupes symétriques de diffusion (au sens de Stein, [50]) permet de démontrer le résultat de type fort suivant, qui est plus fin que celui qu'on obtiendrait en utilisant le théorème 0.7, le cas L^∞ et une technique d'interpolation.

Théorème 0.8. *Supposons $\gamma_{\mathcal{R}} > 0$. Il existe une constante numérique C telle que pour tout p vérifiant $1 < p \leqslant +\infty$ et tout $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$*

$$\left\|M_\kappa^W f\right\|_{W,\kappa,p} \leqslant C\Big(\frac{p}{p-1}\Big)\sqrt{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}\;\|f\|_{W,\kappa,p}.$$

La suite du chapitre est consacrée à des inégalités de Fefferman-Stein pour l'opérateur maximal de Dunkl. Comme nous l'avons dit précédemment, nous y parvenons dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$. Même si l'on dispose d'informations sur la translation de Dunkl dans ce contexte précis, il n'est pas possible d'établir ces inégalités directement pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$. Un moyen de contourner cette difficulté consiste à construire un opérateur auxiliaire qui va contrôler en un certain sens notre opérateur maximal et pour lequel on pourra démontrer un théorème maximal et une inégalité à poids. Pour la construction, l'idée de base est qu'il faut se débarrasser finement de l'opérateur de translation généralisé. Au moyen d'estimations sur le noyau de Dunkl notamment, on démontre l'inégalité suivante, où l'on note pour $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$

$$I(x,r) =]\max\{0;|x|-r\},|x|+r[.$$

Théorème 0.9. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $y \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$ on a*

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant C\prod_{j=1}^d \frac{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)}{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(I(x_j,r))},$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de x, y, r.

Ce théorème généralise une estimation prouvée par Bloom et Xu ([8]) dans le cadre des hypergroupes unidimensionnels de Bessel-Kingman et exploitée dans le cadre de l'analyse de Dunkl unidimensionnelle par Abdelkefi et Sifi ([1]). Cette inégalité joue un rôle essentiel car elle permet de construire un opérateur auxiliaire qui contrôle l'opérateur maximal de Dunkl. Plus précisément, on est naturellement amené à considérer l'opérateur suivant

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |f(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),$$

avec

$$R(x,r) = I(x_1,r) \times \cdots \times I(x_d,r), \qquad \tilde{y} = \big(|y_1|,\ldots,|y_d|\big),$$

et il est alors relativement aisé de montrer la proposition suivante. En effet, la preuve repose essentiellement sur l'estimation précédente et sur l'idée de transiter par des cubes pour pouvoir se rapporter en quelque sorte à une situation unidimensionnelle.

Proposition 0.10. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a l'inégalité de contrôle suivante*

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x),$$

où $C = C(d,\kappa)$ est indépendante de f et de x.

Cet opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ a l'avantage d'être de type Hardy-Littlewood, c'est-à-dire que l'on peut démontrer de manière classique un théorème maximal par une technique de recouvrement et d'interpolation d'une part, et une inégalité à poids d'autre part. Les difficultés techniques sont certes accrues comparativement au cas de l'opérateur maximal usuel, mais il n'en reste pas moins que l'on peut utiliser des arguments puissants d'analyse réelle. On peut de ce fait prouver que $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ vérifie des inégalités de Fefferman-Stein. Par conséquent, couplées à la proposition 0.10, ces inégalités entraînent le résultat fondamental suivant pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$.

Théorème 0.11. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\bigg(\bigg\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\bigg\}\bigg) \leqslant \frac{C}{\lambda}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

   où $C = C(d,\kappa,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors on a*

$$\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

   où $C = C(d,\kappa,p,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Signalons que notre schéma de preuve permet de donner une nouvelle démonstration du théorème maximal de Thangavelu et Xu dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$.

On étend ensuite notre théorème maximal vectoriel à une plus large classe d'opérateurs qui contient en particulier l'opérateur maximal associé au semi-groupe de la chaleur de type Dunkl et l'opérateur maximal associé au semi-groupe de Poisson de type Dunkl. En notant $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}$ l'opérateur maximal associé à cette classe (où ϕ est une fonction radiale vérifiant certaines propriétés), on prouve que l'opérateur maximal de Dunkl associé à $\mathbb{Z}_2^d$ contrôle ponctuellement l'opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}$ et, en utilisant le théorème 0.11, on démontre le résultat suivant.

Théorème 0.12. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi} f_n(x)|^r\right)^{\frac{1}{r}} > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{C}{\lambda}\left\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

où $C = C(d,\kappa,r,\phi)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors on a*

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi} f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C\left\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

où $C = C(d,\kappa,p,r,\phi)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Dans le troisième chapitre, on cherche à compléter dans un premier temps le théorème maximal vectoriel en établissant, tout comme l'ont fait Fefferman et Stein dans le cas usuel ([24]), un résultat d'intégrabilité exponentielle dans le cas où $p = +\infty$. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 0.13. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$. Soit $1 < r < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^\infty(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ est telle que*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\operatorname{supp} \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right) < +\infty,$$

alors la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(\cdot)|^r$ est exponentiellement intégrable sur tout compact. Plus précisément, il existe une constante ne dépendant que de d, κ et r, que l'on note $C_{d,\kappa,r}$, telle que pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ et pour tout ε vérifiant

$$0 \leqslant \varepsilon < \frac{\log(2)\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{-1}}{2C_{d,\kappa,r}},$$

on a l'inégalité

$$\int_K \mathrm{e}^{\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r} \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)$$
$$\leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K) + \frac{2\varepsilon C_{d,\kappa,r}\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty} \max\left\{2\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K); \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\operatorname{supp} \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)\right\}}{\log(2) - 2\varepsilon C_{d,\kappa,r}\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}}.$$

Ce résultat d'intégrabilité exponentielle est intimement lié au comportement des constantes du théorème 0.11. En étudiant le comportement de celles-ci lorsque p est grand (avec r fixé) et en donnant une estimation fine pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$ de la mesure (au sens de $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$) de l'ensemble

$$\Big\{x \in K : \sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r > \lambda\Big\},$$

la preuve du théorème 0.13 se réduit alors à des considérations techniques. Ce résultat d'intégrabilité locale peut d'ailleurs constituer une motivation pour introduire des espaces d'Orlicz dans le cadre de la théorie de Dunkl rationnelle.

Dans la seconde partie du chapitre, on établit des inégalités de Fefferman-Stein dans le cadre des hypergroupes de Bessel-Kingman. Schématiquement, un hypergroupe est un espace topologique X non vide, séparé, localement compact et dont l'espace des mesures bornées de X est muni d'une structure convolutive vérifiant certaines propriétés. La classe d'hypergroupe que l'on considère est unidimensionnelle et on introduit dans ce contexte un opérateur maximal non centré M_A (A désignant une fonction de Chébli-Trimèche particulière). En nous appuyant sur le schéma de preuve utilisé dans le chapitre 2, on démontre le théorème suivant, où l'on désigne par ω_A la mesure de Haar (unique à une constante près) pour les hypergroupes de Bessel-Kingman, par L_A^p (pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) l'espace $L^p(\mathbb{R}_+; \omega_A)$, et par $\|\cdot\|_{A,p}$ la norme associée.

Théorème 0.14. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}_+$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L_A^1$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\omega_A\bigg(\Big\{x \in \mathbb{R}_+ : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_A f_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\bigg) \leqslant \frac{C}{\lambda}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{A,1},$$

où $C = C(A, r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L_A^p$, alors on a*

$$\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_A f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{A,p} \leqslant C\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{A,p},$$

où $C = C(A, p, r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Signalons que les hypergroupes pour lesquels on prouve ce théorème sont à croissance polynomiale du volume. Il serait intéressant d'étudier le cas des hypergroupes unidimensionnels à croissance exponentielle du volume. À notre connaissance, il n'existe pas à l'heure actuelle de théorème maximal vectoriel dans le cadre de structures à croissance exponentielle du volume, contrairement au cas du théorème maximal scalaire. Des résultats de bornitude des opérateurs scalaires existent en effet, notamment dans le cadre des hypergroupes ([8]) et dans le cadre des espaces symétriques de type non compact ([54]).

Dans le dernier chapitre, on cherche à développer la théorie de Dunkl lorsque l'on fixe un sous-système positif de racines composé de m vecteurs $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$ (avec $1 \leqslant m \leqslant d$) deux à deux orthogonaux. Cette étude comprend donc comme cas particulier le cas $\mathbb{Z}_2^d$.

On s'intéresse tout d'abord au noyau de Dunkl. À cet effet, on commence par donner une formule explicite de ce noyau en se servant de la formule de l'opérateur d'entrelacement récemment démontrée par Maslouhi et Youssfi ([34]). Plus précisément, on démontre la proposition suivante. On désigne par W le groupe de réflexions associé au système orthogonal que l'on a fixé et on note $\kappa_1,\dots,\kappa_m$ les m valeurs de la fonction de multiplicité.

Proposition 0.15. *Soit x,y deux éléments de $\mathbb{R}^d$. On a*

$$E_\kappa^W(ix,y)=\mathrm{e}^{i\langle x,y\rangle}\mathrm{e}^{-i\sum_{j=1}^m\frac{\langle x,\alpha^j\rangle\langle y,\alpha^j\rangle}{\|\alpha^j\|^2}}\prod_{j=1}^m E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}\Big(i\frac{\langle x,\alpha^j\rangle}{\|\alpha^j\|},\frac{\langle y,\alpha^j\rangle}{\|\alpha^j\|}\Big).$$

Cette formule est bien explicite puisque l'on sait que le noyau de Dunkl associé à $\mathbb{Z}_2$ est donné par

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(x,y)=j_{\kappa-\frac12}(ixy)+\frac{xy}{2\kappa+1}j_{\kappa+\frac12}(ixy),$$

où j_κ est la fonction de Bessel normalisée d'ordre κ.

On se sert ensuite de la formule explicite afin d'établir la formule produit suivante pour le noyau E_κ^W, où l'on note $\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}$ (avec $x_{\alpha^j}=\frac{\langle x,\alpha^j\rangle}{\|\alpha^j\|}$) la mesure signée qui apparaît dans la formule produit unidimensionnelle due à Rösler ([39]) et qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter ici.

Théorème 0.16. *Soit $x,y,z\in\mathbb{R}^d$. On a la formule produit suivante*

$$\begin{aligned}&E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{d-m}}E_\kappa^W(iz,A^{-1}z')\Big(\bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}\otimes\bigotimes_{l=1}^{d-m}\mathrm{d}\delta_{(x+y)_{\beta^l}}\Big)(z_1',\dots,z_d'),\end{aligned}$$

où l'on désigne par A la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\alpha_1^1}{\|\alpha^1\|} & \cdots & \frac{\alpha_d^1}{\|\alpha^1\|}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\alpha_1^m}{\|\alpha^m\|} & \cdots & \frac{\alpha_d^m}{\|\alpha^m\|}\\ \frac{\beta_1^1}{\|\beta^1\|} & \cdots & \frac{\beta_d^1}{\|\beta^1\|}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\beta_1^{d-m}}{\|\beta^{d-m}\|} & \cdots & \frac{\beta_d^{d-m}}{\|\beta^{d-m}\|}\end{pmatrix}.$$

Dans le théorème ci-dessus, les vecteurs $\beta^1,\dots,\beta^{d-m}$ sont choisis de telle sorte que la famille $\{\alpha^j,\beta^l : 1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant l\leqslant d-m\}$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^d$, et l'on impose à la fonction de multiplicité d'être nulle en ces vecteurs. On montre aisément que cette formule ne dépend pas du choix des vecteurs $\beta^1,\dots,\beta^{d-m}$.

On se penche ensuite sur un cas particulier, celui d'un système de racines de type $\mathcal{A}_1$. Ce système orthogonal est intéressant car on connaît explicitement, grâce aux travaux de Baker et Forrester (voir [5, 6]), la fonction de Bessel généralisée (ou noyau de Dunkl symétrisé) $J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}$: c'est une fonction hypergéométrique multivariée ${}_0F_0^{(\alpha)}$ à deux arguments, et l'on sait d'après Lassalle ([32]) que celle-ci s'exprime en dimension 2 au moyen de polynômes de Gegenbauer U_n^α. Par conséquent, en utilisant la formule explicite du noyau de Dunkl dans le cas $\mathcal{A}_1$ (cas particulier de la proposition 0.15), nous pouvons démontrer l'égalité de fonctions spéciales suivante, où l'on note $\mathbb{N}^{2,P}$ l'ensemble des partitions à au plus 2 parties et où $c(\lambda)$ désigne une constante qu'il n'est pas utile de définir ici.

Théorème 0.17. *Soit κ la valeur strictement positive de la fonction de multiplicité que l'on a associée à $\mathcal{A}_1$. Soit $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x_1x_2>0, y_1y_2>0$. Notons pour tout $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{N}^{2,P}$*

$$G(\lambda,\kappa,x,y)=(x_1x_2y_1y_2)^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}U^\kappa_{\lambda_1-\lambda_2}\Big(\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}\Big)U^\kappa_{\lambda_1-\lambda_2}\Big(\frac{y_1+y_2}{2\sqrt{y_1y_2}}\Big).$$

Alors, on a l'égalité de fonctions spéciales suivante

$$\begin{aligned}&j_{\kappa-\frac12}\Big(\frac{i}{2}(x_1-x_2)(y_1-y_2)\Big)\\&\qquad=\mathrm{e}^{\frac{-(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{N}^{2,P}\\|\lambda|=n}}c(\lambda)\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^{|\lambda|}\Big((\lambda_1-\lambda_2)!\,(2\kappa)_{\lambda_1-\lambda_2}\Big)^2G(\lambda,\kappa,x,y),\end{aligned}$$

avec $|\lambda|$ le poids de la partition λ et $(\cdot)_n$ qui désigne le symbole de Pochhammer.

La suite du chapitre est consacrée à l'étude de la translation de Dunkl dans le contexte général du sous-système positif de racines deux à deux orthogonales. On commence par démontrer de manière standard, c'est-à-dire en utilisant principalement la formule d'inversion pour la transformation de Dunkl et la formule produit pour le noyau, l'expression explicite suivante de l'opérateur de translation généralisé sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 0.18. *Soit $x\in\mathbb{R}^d$. Pour tout $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a la représentation intégrale suivante*

$$\tau_x^{W,\kappa}(f)(y)=\int_{\mathbb{R}^d}f(A^{-1}z)\Big(\bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}\otimes\bigotimes_{l=1}^{d-m}\mathrm{d}\delta_{(x+y)_{\beta^l}}\Big)(z_1,\dots,z_d),\quad y\in\mathbb{R}^d.$$

En utilisant cette expression, on démontre que la translation de Dunkl est, dans ce contexte, un opérateur borné.

Théorème 0.19. *Soit $x\in\mathbb{R}^d$ et soit p vérifiant $1\leqslant p\leqslant+\infty$. La translation de Dunkl $\tau_x^{W,\kappa}$ s'étend à $L^p(\mu_\kappa^W)$ en un opérateur borné qui vérifie*

$$\|\tau_x^{W,\kappa}f\|_{W,\kappa,p}\leqslant 4^m\|f\|_{W,\kappa,p}.$$

On conclut le chapitre par une discussion sur l'opérateur maximal de Dunkl dans ce contexte de système de racines orthogonales. On affirme qu'il vérifie des inégalités de Fefferman-Stein car on peut suivre la stratégie du chapitre 2 pour construire un opérateur de type Hardy-Littlewood qui contrôle M_κ^W dans la mesure où l'on peut démontrer l'estimation suivante.

Théorème 0.20. *Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, tout $y\in\mathbb{R}^d$ et tout $r>0$ on a*

$$|\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)|\leqslant C\prod_{j=1}^m\frac{\mu^{\mathbb{Z}_2}_{\kappa_j}(]-r,r[)}{\mu^{\mathbb{Z}_2}_{\kappa_j}(I(x_{\alpha^j},r))},$$

où $C=C(m,\kappa)$ est une constante indépendante de x,y,r.

De manière plus générale, il est vraisemblable que la plupart des résultats démontrés dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$ soit généralisable dans ce contexte plus large de sous-système positif de racines deux à deux orthogonales.

Notations

Quelques espaces fonctionnels

On note $\mathcal{P}^d$ l'algèbre des polynômes à d variables réelles et à coefficients complexes, et on note $\mathcal{P}_n^d$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré n à d variables réelles et à coefficients complexes.

Pour un espace topologique séparé et localement compact, $\mathcal{C}(X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $\mathcal{C}_b(X)$ (respectivement $\mathcal{C}_c(X)$, $\mathcal{C}_0(X)$) est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}(X)$ qui sont bornées (respectivement qui sont à support compact, qui sont de limite nulle à l'infini). Lorsque X désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ou un ouvert de $\mathbb{R}_+$, on désigne par $\mathcal{C}^n(X)$ (pour un entier naturel $n \geqslant 1$) l'ensemble des fonctions n fois continûment différentiables sur X, et on désigne par $\mathcal{C}^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur X. Bien évidemment, on peut combiner les notations. Par exemple, $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ est l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{C}^\infty(X)$ qui sont à support compact.

Quelques notations ensemblistes

Pour un ensemble donné X, on note ${}^cX$ le complémentaire de X et on note $\operatorname{diam} X$ le diamètre de X. Si X est fini, on désigne par $\# X$ son cardinal.

Pour $r > 0$, on note B_r la boule euclidienne ouverte de rayon r centrée en l'origine. On désigne par S^{d-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

Quelques notations sur les fonctions et les mesures

La partie réelle d'un complexe z est notée $\Re z$. On note Γ la fonction gamma définie pour tout complexe z vérifiant $\Re z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

On note $\mathscr{B}$ la fonction bêta définie pour tout complexe z vérifiant $\Re z > 0$ et tout complexe z' vérifiant $\Re z' > 0$ par

$$\mathscr{B}(z, z') = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z'-1}\, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z')}{\Gamma(z+z')},$$

et l'on note $\mathscr{B}^{-1}(z, z') = \frac{1}{\mathscr{B}(z,z')}$.
La fonction χ_X est la fonction indicatrice d'un ensemble X et la fonction sign est la fonction signe.

On désigne par δ_a la mesure de Dirac au point a. Pour une mesure μ quelconque, on note $\mu(X) = \int_X \mathrm{d}\mu$. Le volume de la sphère unité S^{d-1} sera quant à lui noté $|S^{d-1}|$. Enfin, la notation supp désignera indifféremment le support d'une mesure ou d'une fonction.

Précisons qu'au cours des démonstrations, on ne renomme pas les constantes d'une ligne à une autre lorsque cela n'est pas utile.

Signalons enfin que le lecteur trouvera en toute fin de ce document un index non exhaustif de notations employées dans cette thèse.

Chapitre 1

Préliminaires sur les opérateurs de Dunkl rationnels

Ce chapitre constitue une introduction à l'analyse de Dunkl, c'est-à-dire à l'analyse harmonique et aux fonctions spéciales associées aux opérateurs différentiels-différences introduits en 1989 par Dunkl et plus communément appelés opérateurs de Dunkl rationnels. On y présente les différents objets associés à ces opérateurs en se focalisant sur les aspects qui s'avèreront utiles par la suite. Cette présentation comprend plus précisément, et dans cet ordre, les systèmes de racines et groupes de réflexions, les opérateurs de Dunkl rationnels, l'opérateur d'entrelacement, le noyau et la transformation de Dunkl, les opérateurs de translation et de convolution généralisés. Pour un panorama détaillé de cette théorie, le lecteur pourra utilement consulter le survey de Rösler ([43]) et le livre de Dunkl et Xu ([23]). Pour une introduction aux opérateurs de Dunkl trigonométriques (aussi appelés opérateurs de Dunkl-Cherednik) que nous n'aborderons pas dans cette thèse, nous renvoyons à Heckman ([28]).

1.1 Systèmes de racines et groupes de réflexions

Le cadre de travail est un espace euclidien E de dimension d (avec $d \geqslant 1$) sur lequel nous allons faire agir un groupe de réflexions fini. Pour fixer les idées et sans perte de généralité, on prendra $E = \mathbb{R}^d$ (avec $d \geqslant 1$) muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ par $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^d x_j y_j$. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, c'est-à-dire $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. La base canonique de $\mathbb{R}^d$ sera notée $\{e_j : 1 \leqslant j \leqslant d\}$.

1.1.1 Systèmes de racines

Les groupes de réflexions sont à la base de l'analyse de Dunkl car l'un des buts premiers de Dunkl était d'étudier l'orthogonalité de polynômes pour des mesures invariantes sous l'action de tels groupes.
Afin de définir la notion de groupe de réflexions, nous devons introduire au préalable celle de système de racines. Pour une étude détaillée de ces deux notions, le lecteur pourra consulter le livre de Humphreys ([29]) ou celui de Kane ([31]).
Pour $\alpha \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, on désignera par σ_α la réflexion par rapport à l'hyperplan H_α orthogonal à la droite portée par α. D'un point de vue analytique, on a donc $\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$.

Définition 1.1. Un sous-ensemble fini $\mathcal{R}$ de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^d$ est un système de racines si pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$ on a

1. $\sigma_\alpha(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R} \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$.

Les éléments de $\mathcal{R}$ sont appelés les racines.

Contrairement au contexte des groupes et algèbres de Lie, nous n'imposons ni la condition que $\operatorname{Vect}\mathcal{R} = \mathbb{R}^d$ (on définit le rang du système comme étant la dimension de $\operatorname{Vect}\mathcal{R}$), ni la condition de cristallographie (c'est-à-dire que nous ne supposons pas $2\langle\alpha,\alpha'\rangle\langle\alpha,\alpha\rangle^{-1} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$ et tout $\alpha' \in \mathcal{R}$).

Sous-système positif de racines Choisissons $\alpha_0 \in (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \cap {}^c\mathcal{R}$ de telle sorte que pour tout $\alpha \in \mathcal{R}, \langle\alpha,\alpha_0\rangle \neq 0$. L'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^d : \langle x,\alpha_0\rangle = 0\}$ sépare donc le système de racines en deux ensembles disjoints, à savoir $\mathcal{R}_+ = \{\alpha \in \mathcal{R} : \langle\alpha,\alpha_0\rangle > 0\}$ (dont les éléments sont appelés racines positives) et $\mathcal{R}_- = \{\alpha \in \mathcal{R} : \langle\alpha,\alpha_0\rangle < 0\}$ (dont les éléments sont appelés racines négatives). Plus précisément, les racines étant par paire dans $\mathcal{R}$ (car $\alpha \in \mathcal{R}$ implique $(-\alpha) \in \mathcal{R}$ puisque $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$), on a en fait $\mathcal{R}_- = -\mathcal{R}_+$, et on peut donc écrire $\mathcal{R}$ comme étant l'union disjointe suivante

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \sqcup (-\mathcal{R}_+).$$

Bien évidemment, cette décomposition dépend du choix de α_0 et n'est donc, à ce titre, pas unique.

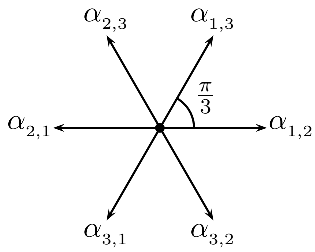
Exemples de systèmes de racines Donnons maintenant quelques exemples de systèmes de racines que nous allons utiliser ou citer par la suite (nous employons les dénominations usuelles pour les systèmes).

Système de type $\mathcal{A}_{d-1}$ Si $d = 1$, le système est $\mathcal{R} = \{\pm 1\}$. Si $d \geqslant 2$, le système est

$$\mathcal{R} = \{\alpha_{j,k} = e_j - e_k : j \neq k\}.$$

Il est de rang $d-1$ et on peut prendre comme sous-système positif $\mathcal{R}_+ = \{\alpha_{j,k} : j < k\}$ en choisissant $\alpha_0 = (d, d-1, \ldots, 1)$.

Configuration $\mathcal{A}_2$:



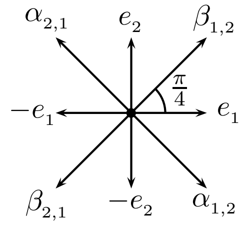
Système de type $\mathcal{B}_d$ Pour $d \geqslant 2$, le système est

$$\mathcal{R} = \{\alpha_{j,k} : j \neq k\} \cup \{\beta_{j,k} = \operatorname{sign}(k-j)(e_j + e_k) : j \neq k\} \cup \{\pm e_j\}.$$

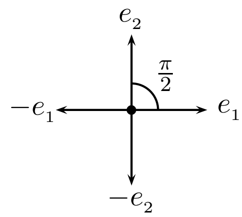
Il est de rang d et on peut prendre comme sous-système positif

$$\mathcal{R}_+ = \{\alpha_{j,k} : j < k\} \cup \{\beta_{j,k} : j < k\} \cup \{e_j\}$$

en choisissant une nouvelle fois $\alpha_0 = (d, d-1, \ldots, 1)$.

Configuration $\mathcal{B}_2$: 

Système de type $\mathcal{A}_0 \times \cdots \times \mathcal{A}_0$ Le système est $\mathcal{R} = \{\pm e_j\}$, il est de rang d. On peut prendre comme sous-système positif $\mathcal{R}_+ = \{e_j\}$ en choisissant $\alpha_0 = (1, \ldots, 1)$.

Configuration $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0$: 

Ce dernier exemple, contrairement aux deux premiers, est un système de racines qui est décomposable (ou réductible). De manière générale, si un système de racines $\mathcal{R}$ peut s'écrire comme union disjointe d'ensembles non vides $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2$ avec $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}_1$ et tout $\alpha' \in \mathcal{R}_2$, alors $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont eux-mêmes des systèmes de racines, et on dit que $\mathcal{R}$ est décomposable (ou réductible). Dans le cas contraire, le système est dit indécomposable (ou irréductible).

1.1.2 Groupes de réflexions

On peut désormais introduire la notion de groupe de réflexions associé à un système de racines.

Définition 1.2. On appelle groupe de réflexions $W(\mathcal{R})$ associé au système de racines $\mathcal{R}$ le sous-groupe du groupe orthogonal $\mathcal{O}(d)$ qui est engendré par $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \mathcal{R}\}$.

Dans un souci de simplification des notations, nous abrégerons $W(\mathcal{R})$ en W lorsqu'il n'est pas utile de préciser le système de racines.
Il est important de donner le théorème suivant à propos des groupes de réflexions. Il stipule entre autres que nous allons faire de l'analyse avec en toile de fond des groupes finis.

Théorème 1.3. *Soit $\mathcal{R}$ un système de racines.*

1. *W est fini.*
2. *L'ensemble des réflexions qui sont contenues dans W est exactement $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \mathcal{R}\}$.*

Exemples de groupes de réflexions On décrit ici les groupes de réflexions associés aux systèmes de racines présentés plus haut.

Le groupe $W(\mathcal{A}_{d-1})$ La réflexion $\sigma_{\alpha_{j,k}}$ échange la j-ème et la k-ème composante d'un vecteur donné ; c'est une transposition. Or, les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_d$, le groupe symétrique à d éléments. On a donc $W(\mathcal{A}_{d-1}) \simeq \mathfrak{S}_d$.

Le groupe $W(\mathcal{B}_d)$ Comme précédemment, la réflexion $\sigma_{\alpha_{j,k}}$ échange la j-ème et la k-ème composante d'un vecteur donné. La réflexion $\sigma_{\beta_{j,k}}$ échange ces deux-mêmes composantes et les multiplie par -1. La réflexion σ_{e_j} multiplie quant à elle par -1 la j-ème composante. On a donc $W(\mathcal{B}_d) \simeq \mathfrak{S}_d \ltimes \mathbb{Z}_2^d$.

Le groupe $W(\mathcal{A}_0 \times \cdots \times \mathcal{A}_0)$ Comme précédemment, la réflexion σ_{e_j} multiplie la j-ème composante par -1 ; on a donc $W(\mathcal{A}_0 \times \cdots \times \mathcal{A}_0) \simeq \mathbb{Z}_2^d$. Dans toute la suite, on désignera par $\mathbb{Z}_2^d$ le groupe de réflexions $W(\mathcal{A}_0 \times \cdots \times \mathcal{A}_0)$ (se placer dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$ signifiera donc que le système de racines considéré est $\mathcal{R} = \{\pm e_j\}$).

Remarque 1.4. Dans cette thèse, lorsque l'on dira que l'on se place dans le cas unidimensionnel, cela signifiera que l'on considère le cas où le groupe de réflexions agissant sur $\mathbb{R}$ est $\mathbb{Z}_2$. C'est de toutes façons le seul cas envisageable. En effet, le seul choix possible de système de racines unidimensionnel est $\mathcal{R}^\alpha = \{\pm\alpha\}$ (avec α réel non nul). Par conséquent, pour $\alpha \neq \beta$, on a

$$W(\mathcal{R}^\alpha) = W(\mathcal{R}^\beta) = \{\mathrm{Id}; \sigma\} \simeq \mathbb{Z}_2,$$

où σ désigne la multiplication par -1.

Rappelons que Dunkl souhaitait établir une théorie des polynômes orthogonaux pour des mesures invariantes sous l'action de groupes de réflexions. Dans cette optique, il lui fallait construire des opérateurs qui soient homogènes de degré -1 sur l'ensemble des polynômes d'une part, et qui prennent en compte l'action de tels groupes d'autre part. En se basant notamment sur l'implication suivante

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \\ p \in \mathcal{P}^d \end{cases} \Longrightarrow p - p \circ \sigma_\alpha \text{ est divisible par } \langle \cdot, \alpha \rangle,$$

il a été amené à définir les opérateurs différentiels-différences sur lesquels nous nous penchons maintenant.

1.2 Opérateurs de Dunkl rationnels

Ces opérateurs ont été introduits en 1989 dans [16] sous le nom d'opérateurs différentiels-différences mais ils sont désormais plus communément appelés opérateurs de Dunkl rationnels. Ce sont schématiquement des déformations des dérivées directionnelles usuelles par des réflexions. Avant d'en donner une définition rigoureuse, il nous faut introduire la notion de fonction de multiplicité associée à un système de racines.

Définition 1.5. Une fonction de multiplicité associée à un système de racines $\mathcal{R}$ est une fonction $\kappa : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ qui est invariante sous l'action de $W(\mathcal{R})$ sur $\mathcal{R}$.

Une fonction de multiplicité prend donc un nombre de valeurs égal au nombre de classes de conjugaison de réflexions de $W(\mathcal{R})$.
Nous sommes désormais en mesure de donner la définition des opérateurs de Dunkl rationnels.

Définition 1.6. Soit κ une fonction de multiplicité associée à un système de racines $\mathcal{R}$, et soit $\xi \in \mathbb{R}^d$. On définit l'opérateur de Dunkl rationnel $T_\xi^{\mathcal{R},\kappa}$ sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ par

$$T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} f(x) = \partial_\xi f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \kappa(\alpha) \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle x, \alpha \rangle} \langle \xi, \alpha \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec $\mathcal{R}_+$ un sous-sytème positif de $\mathcal{R}$.
Dorénavant, on se contentera de dire opérateurs de Dunkl.

Faisons tout de suite trois remarques qui sont, bien qu'évidentes, importantes à souligner.
La première est que les opérateurs de Dunkl coïncident avec les dérivées directionnelles usuelles lorsque κ est la fonction nulle, c'est-à-dire $T_\xi^{\mathcal{R},0} = \partial_\xi$.
La seconde est que ces opérateurs sont indépendants du choix d'un sous-système positif de $\mathcal{R}$ dans la mesure où

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_+} \kappa(\alpha)\frac{f(x)-f(\sigma_\alpha(x))}{\langle x,\alpha\rangle}\langle\xi,\alpha\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \kappa(\alpha)\frac{f(x)-f(\sigma_\alpha(x))}{\langle x,\alpha\rangle}\langle\xi,\alpha\rangle$$

du fait de la définition d'une fonction de multiplicité.
Enfin, la dépendance en ξ est linéaire : il nous suffit donc de considérer les $T_{e_j}^{\mathcal{R},\kappa}$.

Exemples d'opérateurs de Dunkl Écrivons maintenant de manière explicite les opérateurs $T_{e_j}^{\mathcal{R},\kappa}$ dans les cas des systèmes de racines (et des groupes de réflexions associés) que l'on a présentés en détail dans la section précédente.

Opérateurs de type $\mathcal{A}_{d-1}$ Les transpositions sont toutes conjuguées dans $\mathfrak{S}_d$, la fonction de multiplicité ne prend donc qu'une seule valeur que l'on note κ. On a alors

$$T_{e_j}^{\mathcal{A}_{d-1},\kappa}f(x) = \partial_{e_j}f(x) + \kappa\sum_{k=1,k\neq j}^{d}\frac{f(x)-f(\sigma_{\alpha_{j,k}}(x))}{x_j-x_k}.$$

Opérateurs de type $\mathcal{B}_d$ Il y a deux classes de conjugaison de réflexions, l'une qui correspond aux réflexions $\{\sigma_{e_j}\}$, l'autre aux réflexions $\{\sigma_{\alpha_{j,k}},\sigma_{\beta_{j,k}}\}$. En notant respectivement κ_1 et κ_2 les deux seules valeurs de la fonction de multiplicité, on a donc

$$\begin{aligned} &T_{e_j}^{\mathcal{B}_d,\kappa}f(x) \\ &= \partial_{e_j}f(x)+\kappa_1\frac{f(x)-f(\sigma_{e_j}(x))}{x_j}+\kappa_2\sum_{k=1,k\neq j}^{d}\left(\frac{f(x)-f(\sigma_{\alpha_{j,k}}(x))}{x_j-x_k}+\frac{f(x)-f(\sigma_{\beta_{j,k}}(x))}{x_j+x_k}\right). \end{aligned}$$

Opérateurs de type $\mathcal{A}_0\times\cdots\times\mathcal{A}_0$ Pour tout $j\neq k$, la classe de conjugaison de σ_{e_j} est différente de celle de σ_{e_k}. On a donc d classes de conjugaison, et en notant $\kappa_j=\kappa(e_j)$ on obtient

$$T_{e_j}^{\mathcal{A}_0\times\cdots\times\mathcal{A}_0,\kappa}f(x) = \partial_{e_j}f(x)+\kappa_j\frac{f(x)-f(\sigma_{e_j}(x))}{x_j}.$$

Les opérateurs de Dunkl présentent des propriétés similaires à celles des dérivées directionnelles usuelles. Outre le fait que ces opérateurs sont homogènes de degré -1 sur $\mathcal{P}^d$, on peut notamment signaler qu'ils laissent invariant l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ainsi que l'espace de Schwartz (noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$). Mais le théorème fondamental sur ces opérateurs est le fait qu'ils commutent pour un système de racines et une fonction de multiplicité associée fixés.

Théorème 1.7. *Soit $\mathcal{R}$ un système de racines et soit κ une fonction de multiplicité associée à ce système. Pour tout $\xi\in\mathbb{R}^d$ et tout $\xi'\in\mathbb{R}^d$ on a alors*

$$T_\xi^{\mathcal{R},\kappa}T_{\xi'}^{\mathcal{R},\kappa} = T_{\xi'}^{\mathcal{R},\kappa}T_\xi^{\mathcal{R},\kappa}.$$

Ce résultat est dû à Dunkl ([16]). La preuve repose essentiellement sur l'étude du comportement des rotations de W sur la partie différence-différence. Une autre démonstration a été donnée depuis par Dunkl, de Jeu et Opdam (voir [22]). Cette nouvelle preuve utilise des idées liées au complexe de Koszul.

Le Laplacien de Dunkl Une des conséquences de la commutativité des opérateurs de Dunkl est que l'application $\phi_\kappa^{\mathcal{R}} : \mathcal{P}^d \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}^d)$ définie par

$$\phi_\kappa^{\mathcal{R}} : 1 \mapsto \mathrm{Id}, \quad x_j \mapsto T_{e_j}^{\mathcal{R},\kappa},$$

est un homomorphisme d'algèbre. Pour $p \in \mathcal{P}^d$, on note $p(T^{\mathcal{R},\kappa}) = \phi_\kappa^{\mathcal{R}}(p)$. Le Laplacien de Dunkl est défini par

$$\Delta_\kappa^W = p(T^{\mathcal{R},\kappa}), \quad \text{avec} \quad p(x) = \|x\|^2.$$

La formule explicite suivante est due à Dunkl ([16]).

Proposition 1.8. *On a l'égalité suivante*

$$\Delta_\kappa^W = \Delta + 2 \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \kappa(\alpha) D_\alpha,$$

avec d'une part

$$D_\alpha f(x) = \frac{\partial_\alpha f(x)}{\langle x, \alpha \rangle} - \frac{\|\alpha\|^2}{2} \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle x, \alpha \rangle^2},$$

et d'autre part Δ qui désigne le Laplacien usuel.

En notant $\mathrm{Res}\,\Delta_\kappa^W$ la restriction du Laplacien de Dunkl aux fonctions invariantes sous l'action de W, on obtient

$$\mathrm{Res}\,\Delta_\kappa^W = \Delta + 2 \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \kappa(\alpha) \frac{\partial_\alpha}{\langle \cdot, \alpha \rangle}.$$

L'exemple de la dimension un est particulièrement intéressant. Dans ce cas, on a

$$\mathrm{Res}\,\Delta_\kappa^{\mathbb{Z}_2} f(x) = f''(x) + \frac{2\kappa}{x} f'(x).$$

Si l'on écrit $\kappa = \frac{n-1}{2}$, l'égalité précédente n'est rien d'autre que la formule donnant la partie radiale du Laplacien de $\mathbb{R}^n$ en coordonnées polaires.
De manière plus générale, la restriction du Laplacien de Dunkl aux fonctions invariantes sous l'action de W généralise la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami d'un espace symétrique riemannien de type euclidien. Pour de plus amples explications sur le lien avec les espaces symétriques, on pourra consulter [11].

Concluons cette section en signalant que les opérateurs de Dunkl et le Laplacien associé sont à la base d'une théorie des harmoniques sphériques généralisées, dont une large étude est présentée dans [23].

1.3 Opérateur d'entrelacement et noyau de Dunkl

Désormais, pour pouvoir énoncer des résultats en toute généralité, on supposera toujours que la fonction de multiplicité est positive ou nulle.
Le fait que les opérateurs de Dunkl commutent nous amène naturellement à considérer le problème des fonctions propres, c'est-à-dire que l'on cherche pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé toutes les fonctions solutions du système

$$(\mathcal{E}) : \begin{cases} T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} f & = \langle x, \xi \rangle f \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \\ f(0) & = 1. \end{cases}$$

Cette question a été intégralement résolue : l'existence de solutions a été démontrée par Dunkl en 1991 (voir [18]) et l'unicité par Opdam en 1993 (voir [38]).
Pour $\kappa = 0$, le système $(\mathcal{E})$ a pour solutions évidentes les fonctions $y \mapsto \mathrm{e}^{\langle x,y \rangle}$ puisque $T_\xi^{\mathcal{R},0} = \partial_\xi$. Or, Dunkl a montré l'existence d'un opérateur V_κ^W qui entrelace l'algèbre des opérateurs différentiels-différences et l'algèbre des dérivées directionnelles usuelles, c'est-à-dire qui vérifie entre autres

$$T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} V_\kappa^W = V_\kappa^W \partial_\xi.$$

Il a alors considéré naturellement comme solution de $(\mathcal{E})$ l'image de l'exponentielle par cet opérateur d'entrelacement que nous allons maintenant présenter.

1.3.1 Opérateur d'entrelacement

Dunkl a prouvé en 1991 (voir [18]) la propriété d'entrelacement suivante. Ce théorème est l'un des résultats fondamentaux de la théorie.

Théorème 1.9. *Il existe un unique isomorphisme V_κ^W sur $\mathcal{P}^d$ vérifiant*

$$V_\kappa^W(\mathcal{P}_n^d) = \mathcal{P}_n^d, \qquad V_\kappa^W{}_{|_{\mathcal{P}_0^d}} = \mathrm{Id}_{|_{\mathcal{P}_0^d}}, \qquad T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} V_\kappa^W = V_\kappa^W \partial_\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Cet opérateur est appelé opérateur d'entrelacement.

La construction de cet opérateur, qui se fait par récurrence sur les $\mathcal{P}_n^d$, ne fait intervenir que des considérations d'algèbre linéaire (voir [17] et [18]). Si $\kappa = 0$, on a bien évidemment $V_\kappa^W = \mathrm{Id}$.
L'opérateur d'entrelacement n'est connu de manière explicite que dans très peu de cas, et cela constitue un des problèmes majeurs de la théorie de Dunkl. Dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$, on a la formule suivante démontrée par Xu dans [60] (formule qui généralise le cas unidimensionnel donné par Dunkl dans [18]).

Théorème 1.10. *Soit $\mathcal{R} = \{\pm e_j\}$ et soit $W(\mathcal{R}) \simeq \mathbb{Z}_2^d$ le groupe de réflexions associé. Notons κ_j la valeur de la fonction de multiplicité en e_j. L'opérateur d'entrelacement $V_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$ est donné par la représentation intégrale suivante*

$$V_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} p(x) = \int_{[-1,1]^d} p(x_1 t_1, \ldots, x_d t_d) \prod_{j=1}^d \mathscr{B}^{-1}\Big(\kappa_j, \frac{1}{2}\Big)(1 + t_j)(1 - t_j^2)^{\kappa_j - 1}\, \mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Une extension de ce résultat au cas d'un sous-système positif $\mathcal{R}_+ = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$ (avec $1 \leqslant m \leqslant d$) de racines deux à deux orthogonales a été récemment démontrée par Maslouhi et Youssfi (voir [34]). Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4.

L'opérateur d'entrelacement est connu dans deux autres cas : lorsque l'on considère un système de racines de type $\mathcal{A}_2$ et lorsque l'on considère un système de type $\mathcal{B}_2$ (sous l'hypothèse supplémentaire que les deux valeurs de la fonction de multiplicité sont égales). Pour démontrer une formule explicite dans le cas $\mathcal{A}_2$ (respectivement $\mathcal{B}_2$), Dunkl a utilisé des formules d'intégration de Harish-Chandra sur le groupe $\mathfrak{S}_3$ (respectivement $W(\mathcal{B}_2)$) vu comme groupe de Weyl du groupe de Lie compact $U(3)$ (respectivement $Sp(2)$), le groupe des matrices unitaires (respectivement le groupe symplectique). Malheureusement, les formules de l'opérateur d'entrelacement dans ces deux cas n'ont jusqu'à présent pas été exploitées. Nous renvoyons à [20] et à [21] pour l'étude de ces deux cas.

Extension de l'opérateur d'entrelacement à d'autres espaces de fonctions Il est important de pouvoir étendre l'opérateur d'entrelacement à des espaces fonctionnels plus généraux que celui des polynômes. Commençons pour cela par introduire pour tout $r > 0$ l'espace A_r qui désigne la fermeture de $\mathcal{P}^d$ pour la norme $\|\cdot\|_{A_r}$ définie pour $p = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ ($p_n \in \mathcal{P}_n^d$) par

$$\|p\|_{A_r} = \sum_{n=0}^{+\infty} \|p_n\|_{\infty,\overline{B}_r},$$

avec $\overline{B}_r$ la boule euclidienne fermée de rayon r centrée en l'origine. Signalons que A_r est une algèbre de Banach commutative, que tout élément f de A_r appartient à $\mathcal{C}(\overline{B}_r) \cap \mathcal{C}^\infty(B_r)$ et peut s'écrire de manière unique sous la forme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (avec $f_n \in \mathcal{P}_n^d$).
Dans [18], Dunkl a étendu de manière unique V_κ^W en un opérateur linéaire borné sur A_r. Plus précisément, au moyen d'une généralisation d'une inégalité de Van der Corput-Schaake, il a montré que pour tout $p \in \mathcal{P}_n^d$

$$\|V_\kappa^W p\|_{\infty,\overline{B}_r} \leqslant \|p\|_{\infty,\overline{B}_r},$$

inégalité dont il a déduit le résultat suivant.

Théorème 1.11. *Pour tout $p \in \mathcal{P}^d$, on a $\|V_\kappa^W p\|_{A_r} \leqslant \|p\|_{A_r}$, et V_κ^W s'étend uniquement en un opérateur linéaire borné sur A_r par*

$$V_\kappa^W f = \sum_{n=0}^{+\infty} V_\kappa^W f_n \quad \textit{avec} \quad f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

Positivité de l'opérateur d'entrelacement Dunkl a conjecturé dans [18] la positivité de l'opérateur d'entrelacement sur l'espace A_r en s'appuyant sur la formule unidimensionnelle de $V_\kappa^{\mathbb{Z}_2}$ qu'il avait trouvée. Rösler a montré la véracité de cette conjecture en 1999 en donnant une représentation intégrale de V_κ^W pour un groupe de réflexions quelconque (voir [41]).

Théorème 1.12. *1. V_κ^W est positif sur $\mathcal{P}^d$.*

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique mesure de probabilité $\eta_x^{W,\kappa}$ sur la σ-algèbre de Borel de $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $f \in A_{\|x\|}$

$$V_\kappa^W f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\mathrm{d}\eta_x^{W,\kappa}(y). \tag{1.2}$$

La mesure $\eta_x^{W,\kappa}$ est à support compact avec $\operatorname{supp}\eta_x^{W,\kappa} \subset \operatorname{co}\{w(x) : w \in W\}$, l'enveloppe convexe de l'orbite de x sous l'action de W. De plus, on a pour tout $r > 0$, pour tout $w \in W$ et pour tout Borélien $B \in \mathbb{R}^d$

$$\eta_{rx}^{W,\kappa}(B) = \eta_x^{W,\kappa}(r^{-1}B), \quad \eta_{w(x)}^{W,\kappa}(B) = \eta_x^{W,\kappa}(w^{-1}(B)).$$

Le second point se déduit assez facilement du premier grâce à un théorème de représentation de Bochner dans le cadre des algèbres de Banach commutatives. La positivité de V_κ^W sur $\mathcal{P}^d$, plus difficile, est basée sur des résultats concernant les semi-groupes de Feller. Le théorème 1.12 permet d'étendre facilement l'opérateur V_κ^W à d'autres espaces fonctionnels, comme par exemple $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ et $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (l'ensemble des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ et localement intégrables). Une extension de V_κ^W à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ est due à Trimèche (voir [57]).

On en vient maintenant à l'étude du noyau de Dunkl.

1.3.2 Noyau de Dunkl

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, la fonction $\mathrm{e}^{\langle x,\cdot\rangle}$ appartient à l'espace A_r. La définition suivante, donnée par Dunkl dans [18], a donc bien un sens.

Définition 1.13. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$. On définit

$$E_\kappa^W(x,y) = V_\kappa^W(\mathrm{e}^{\langle x,\cdot\rangle})(y).$$

La fonction E_κ^W s'appelle le noyau de Dunkl associé à W et κ.

Ce noyau est solution du système $(\mathcal{E})$ présenté au début de la section. En effet, on a d'une part $E_\kappa^W(x,0) = 1$ d'après l'homogénéité de V_κ^W. D'autre part, on a bien pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ l'égalité

$$T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} E_\kappa^W(x,\cdot) = \langle x,\xi\rangle E_\kappa^W(x,\cdot)$$

du fait de la propriété d'entrelacement $T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} V_\kappa^W = V_\kappa^W \partial_\xi$ et du fait que l'exponentielle classique est solution du système $(\mathcal{E})$ pour $\kappa = 0$ (c'est-à-dire pour un système de dérivées directionnelles usuelles).
La question de l'unicité des solutions est un problème beaucoup plus difficile. Le résultat est dû à Opdam ([38]).

Théorème 1.14. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Alors $E_\kappa^W(x,\cdot)$ est l'unique solution analytique réelle du système $(\mathcal{E})$. De plus, E_κ^W s'étend holomorphiquement à $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$.*

La preuve s'appuie en partie sur la théorie des représentations monodromiques d'espaces de solutions locales en des points bases.
Tout comme l'opérateur d'entrelacement, le noyau de Dunkl n'est connu que dans de rares cas. Le plus important est celui de la dimension un, c'est-à-dire que l'on considère le groupe de réflexions $\mathbb{Z}_2$ et que l'on note κ la seule valeur de la fonction de multiplicité que l'on suppose strictement positive (si $\kappa = 0$, le noyau de Dunkl est tout simplement l'exponentielle classique). On a alors pour $x, y \in \mathbb{C}$

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(x,y) = j_{\kappa-\frac{1}{2}}(ixy) + \frac{xy}{2\kappa+1} j_{\kappa+\frac{1}{2}}(ixy), \tag{1.3}$$

où j_κ est la fonction de Bessel normalisée d'ordre κ, c'est-à-dire

$$j_\kappa(z) = \Gamma(\kappa+1)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n! 2^{2n}\Gamma(n+\kappa+1)} = 2^\kappa \Gamma(\kappa+1)\frac{J_\kappa(z)}{z^\kappa},$$

où J_κ est la notation standard pour désigner la fonction de Bessel de première espèce d'ordre κ. Nous renvoyons au livre de Watson ([58]) pour une étude détaillée de la théorie

des fonctions de Bessel.
D'après la formule explicite (1.1) de l'opérateur d'entrelacement pour le groupe $\mathbb{Z}_2^d$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{C}^d$ et tout $y \in \mathbb{C}^d$

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x,y) = \prod_{j=1}^{d} E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(x_j, y_j),$$

où l'on note $\kappa_1, \ldots, \kappa_d$ les d valeurs de la fonction de multiplicité.
Bien que l'on ne dispose que dans de rares cas d'une formule explicite du noyau, on sait qu'il a de nombreuses propriétés en commun avec l'exponentielle (l'action du groupe orthogonal sur l'exponentielle étant remplacée par l'action du groupe de réflexions sur le noyau de Dunkl). On a par exemple les propriétés élémentaires suivantes (voir [10]).

Proposition 1.15. *Soit $x, y \in \mathbb{C}^d$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $w \in W$. Alors*

1. $E_\kappa^W(x,y) = E_\kappa^W(y,x)$;
2. $E_\kappa^W(\lambda x,y) = E_\kappa^W(x,\lambda y)$;
3. $E_\kappa^W(w(x),w(y)) = E_\kappa^W(x,y)$;
4. $\overline{E_\kappa^W(x,y)} = E_\kappa^W(\overline{x},\overline{y})$.

Citons enfin le théorème important suivant qui est dû à Rösler ([41]). C'est une conséquence immédiate du théorème de représentation de l'opérateur d'entrelacement (théorème 1.12).

Théorème 1.16. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a la représentation intégrale suivante*

$$E_\kappa^W(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\langle z,y\rangle}\, \mathrm{d}\eta_x^{W,\kappa}(z),$$

où $\eta_x^{W,\kappa}$ est la mesure donnée par la formule (1.2).
Par conséquent, le noyau de Dunkl satisfait les propriétés suivantes.

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$, $E_\kappa^W(x,y) > 0$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $y \in \mathbb{C}^d$ et pour tout $N = (N_1, \ldots, N_d) \in \mathbb{N}^d$*

$$|\partial_y^N E_\kappa^W(x,y)| \leqslant |x|^{\sum_{j=1}^d N_j} \max_{w\in W} \mathrm{e}^{\Re\langle w(x),y\rangle}.$$

3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$, $|E_\kappa^W(ix,y)| \leqslant 1$.*

On termine cette section en présentant de manière succincte la fonction de Bessel généralisée (aussi appelée noyau de Dunkl symétrisé).

La fonction de Bessel généralisée La définition de cette fonction, donnée par Opdam dans [38], a été motivée par le cas de la dimension un dans lequel on a

$$2j_{\kappa-\frac{1}{2}}(ixy) = E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(x,y) + E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(-x,y).$$

Définition 1.17. La fonction de Bessel généralisée J_κ^W est définie pour tout $x \in \mathbb{C}^d$ et tout $y \in \mathbb{C}^d$ par

$$J_\kappa^W(x,y) = \frac{1}{\#W} \sum_{w\in W} E_\kappa^W(w(x),y).$$

Signalons que cette fonction est une généralisation des fonctions sphériques d'un espace symétrique de type euclidien (voir [38] ou [11] pour les détails). Pour des formules explicites du noyau de Dunkl symétrisé en termes de fonctions hypergéométriques multivariées, le lecteur pourra consulter le chapitre 4 de cette thèse dans lequel nous rappelons les résultats donnés dans les articles [5, 6] de Baker et Forrester (pour le cas du groupe de réflexions $\mathfrak{S}_d$ et le cas du groupe de réflexions $\mathfrak{S}_d \ltimes \mathbb{Z}_2^d$). Le lecteur pourra également consulter l'article [13] de Demni (pour le cas d'un système de racines de type diédral).

Nous allons maintenant nous intéresser à la transformation de Dunkl. Le noyau de Dunkl va être à cette transformation ce que l'exponentielle est à la transformation de Fourier euclidienne.

1.4 La transformation de Dunkl

Cette transformation intégrale a été définie par Dunkl au début des années 90 pour une fonction de multiplicité positive ([19]), puis étudiée dans le cadre plus général où $\Re\kappa(\alpha) \geqslant 0$ (pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$) par de Jeu ([10]).
Avant de donner la définition de cette transformation, introduisons plusieurs objets et notations.
On notera μ_κ^W la mesure de Lebesgue à poids suivante

$$\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) = \prod_{\alpha\in\mathcal{R}_+} |\langle x, \alpha\rangle|^{2\kappa(\alpha)}\,\mathrm{d}x = h_{W,\kappa}^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Puisque la fonction de multiplicité κ est, par définition, invariante sous l'action de W, le poids $h_{W,\kappa}$ l'est également. Par conséquent, la mesure μ_κ^W ne dépend pas du choix du sous-système positif de racines. De plus, le poids $h_{W,\kappa}$ est homogène de degré

$$\gamma_{\mathcal{R}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}_+} \kappa(\alpha).$$

Remarque 1.18. Dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$, on notera $\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}$ plutôt que $\gamma_{\mathcal{A}_0\times\cdots\times\mathcal{A}_0}$.

Signalons qu'il n'est pas anodin de considérer cette mesure. D'une part, les opérateurs de Dunkl sont anti-symétriques pour μ_κ^W, c'est-à-dire que pour f et g suffisamment régulières

$$\int_{\mathbb{R}^d} T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} f(x) g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x) T_\xi^{\mathcal{R},\kappa} g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x).$$

D'autre part, un crochet de type Fisher $[.,.]_{\mathcal{R},\kappa}$, utilisé dans la théorie des harmoniques sphériques généralisées et défini pour $p, q \in \mathcal{P}^d$ par

$$[p,q]_{\mathcal{R},\kappa} = \big(p(T^{\mathcal{R},\kappa})q\big)(0)$$

est étroitement lié au produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d; \mathrm{e}^{-\|\cdot\|^2/2} h_{W,\kappa}^2)$ (formule de Macdonald).
On notera c_κ^W la constante de Mehta suivante

$$c_\kappa^W = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x)\right)^{-1}.$$

Enfin, on désignera par $L^p(\mu_\kappa^W)$ l'espace $L^p(\mathbb{R}^d;\mu_\kappa^W)$ et on utilisera la notation abrégée $\|\cdot\|_{W,\kappa,p}$ plutôt que $\|\cdot\|_{L^p(\mu_\kappa^W)}$. Pour $p\in[1,+\infty]$, $L^p(\mu_\kappa^W)$ est bien sûr l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\begin{aligned}\|f\|_{W,\kappa,p} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x)\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad \text{si } 1\leqslant p<+\infty\\ \|f\|_{W,\kappa,\infty} &= \operatorname{supess}_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)| < +\infty \quad \text{si } p=+\infty.\end{aligned}$$

Nous sommes désormais en mesure de donner la définition de la transformation de Dunkl qui s'avère être un outil très important dans le développement de l'analyse harmonique associée à des groupes de réflexions.

Définition 1.19. Soit $f\in L^1(\mu_\kappa^W)$. La transformée de Dunkl de f, notée $\mathcal{F}_\kappa^W(f)$, est définie pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ par

$$\mathcal{F}_\kappa^W(f)(x) = c_\kappa^W\int_{\mathbb{R}^d}E_\kappa^W(-ix,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y).$$

On désigne par $\mathcal{F}_\kappa^W$ la transformation de Dunkl.

Puisque $|E_\kappa^W(-ix,y)|\leqslant 1$, $\mathcal{F}_\kappa^W(f)$ est bornée et il est assez évident de voir que $\mathcal{F}_\kappa^W(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.
Cette transformation généralise la transformation de Fourier euclidienne. En effet, si κ est la fonction nulle, alors μ_κ^W est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $E_\kappa^W(-ix,y)=\mathrm{e}^{-i\langle x,y\rangle}$, et l'on a ainsi $\mathcal{F}_\kappa^W f=\hat f$ avec $\hat f$ la transformation de Fourier usuelle.
Un autre cas intéressant est celui de la dimension un. Le noyau de Dunkl est donné par la formule (1.3), et puisque l'on a d'une part

$$\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(x) = |x|^{2\kappa}\,\mathrm{d}x,$$

et d'autre part

$$(c_\kappa^{\mathbb{Z}_2})^{-1} = 2^{\kappa+\frac12}\Gamma\Big(\kappa+\frac12\Big),$$

on peut affirmer que pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(f)(x) = \frac{1}{2^{\kappa+\frac12}\Gamma\big(\kappa+\frac12\big)}\int_{\mathbb{R}}\Big(j_{\kappa-\frac12}(xy) - \frac{ixy}{2\kappa+1}j_{\kappa+\frac12}(xy)\Big)f(y)|y|^{2k}\,\mathrm{d}y.$$

Si f est une fonction paire, on en déduit que

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(f)(x) = \frac{1}{2^{\kappa+\frac12}\Gamma\big(\kappa+\frac12\big)}\int_{\mathbb{R}}j_{\kappa-\frac12}(xy)f(y)|y|^{2\kappa}\,\mathrm{d}y = \mathcal{H}_{\kappa-\frac12}(f)(x),$$

avec $\mathcal{H}_{\kappa-\frac12}$ qui désigne la transformation de Hankel d'ordre $\kappa-\frac12$.
De manière plus générale, la transformation de Dunkl a de nombreuses propriétés en commun avec la transformation de Fourier. On liste dans la proposition suivante les plus basiques (voir [19] ou [10]).

Proposition 1.20. *1. Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout entier j vérifiant $1\leqslant j\leqslant d$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, on a*

(a) $T_{e_j}^{\mathcal{R},\kappa}\big(\mathcal{F}_\kappa^W(f)\big)(x) = -\mathcal{F}_\kappa^W\big(ix_jf\big)(x)$;

(b) $\mathcal{F}_\kappa^W(T_{e_j}^{\mathcal{R},\kappa}f)(x) = ix_j\mathcal{F}_\kappa^W(f)(x)$.

2. *La transformation de Dunkl laisse $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ invariant.*
3. *Soit $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$. Alors $\mathcal{F}_\kappa^W(f) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.*

Plus essentiel est le théorème suivant qui nous fournit une formule d'inversion et un théorème de Plancherel (voir [19] ou [10]).

Théorème 1.21. 1. ***Formule d'inversion*** *Soit $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$. Si $\mathcal{F}_\kappa^W(f) \in L^1(\mu_\kappa^W)$, alors on a la formule d'inversion suivante*

$$f(x) = c_\kappa^W \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(ix, y)\mathcal{F}_\kappa^W(f)(y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

2. ***Théorème de Plancherel*** *La transformation de Dunkl s'étend uniquement en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mu_\kappa^W)$.*

Dans [19], Dunkl prouve ce théorème en trouvant une base de $L^2(\mu_\kappa^W)$ composée de fonctions propres pour $\mathcal{F}_\kappa^W$ (ces fonctions s'exprimant au moyen de polynômes de Laguerre), alors que de Jeu le prouve dans [10] de manière plus élémentaire, en utilisant entre autres des résultats de densité et le fait que pour $f, g \in L^1(\mu_\kappa^W)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}_\kappa^W(f)(x)g(x)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}_\kappa^W(g)(x)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(x).$$

Étant donné l'importance de l'opérateur de translation et de l'opérateur de convolution en analyse de Fourier, il semble naturel d'associer à la transformation de Dunkl une généralisation de ces deux opérateurs.

1.5 Translation et convolution de Dunkl

1.5.1 Translation de Dunkl

L'opérateur de translation classique, défini pour $x \in \mathbb{R}^d$ par $\tau_x : f \mapsto f(\cdot + x)$, joue un rôle essentiel en analyse de Fourier euclidienne. Cependant, les mesures μ_κ^W considérées ne sont pas, contrairement à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, invariantes par translation. Nous allons donc définir un opérateur de translation généralisé au moyen de la transformation de Dunkl, en mimant l'action de la transformation de Fourier sur l'opérateur classique, à savoir

$$\widehat{\tau_x f}(y) = \mathrm{e}^{i\langle x,y\rangle}\hat{f}(y).$$

En se plaçant dans le cadre de l'analyse de Dunkl, on est naturellement conduit à la définition suivante qui est celle donnée par Thangavelu et Xu dans [56] avec une convention différente.

Définition 1.22. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. L'opérateur généralisé de translation $f \mapsto \tau_x^{W,\kappa} f$ est défini sur $L^2(\mu_\kappa^W)$ par l'équation

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\tau_x^{W,\kappa} f)(y) = E_\kappa^W(ix, y)\mathcal{F}_\kappa^W(f)(y), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

On dira plutôt translation de Dunkl.

Remarque 1.23. Dans le cas où la fonction de multiplicité est nulle, la translation de Dunkl coïncide avec la translation usuelle.

Remarque 1.24. Signalons que cet opérateur généralisé est apparu pour la première fois dans l'article de Rösler (voir [40]) mais défini de manière différente, et qu'une définition au moyen de l'opérateur d'entrelacement (et de l'opérateur d'entrelacement dual) est donnée par Trimèche (voir [57]).

D'après le théorème de Plancherel et le fait que $|E_\kappa^W(ix,y)| \leqslant 1$, on a immédiatement la propriété que l'opérateur $\tau_x^{W,\kappa}$ est borné sur $L^2(\mu_\kappa^W)$. Le caractère $L^p(\mu_\kappa^W)$-borné de la translation de Dunkl (pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty, p \neq 2$) demeure quant à lui, en toute généralité, un problème ouvert. Des résultats partiels existent, nous les verrons un peu plus tard dans cette sous-section.
Il est commode d'avoir une classe de fonctions sur laquelle on peut définir ponctuellement la translation de Dunkl. Cela peut être fait pour l'ensemble suivant

$$\mathscr{A}_\kappa^W(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^1(\mu_\kappa^W) : \mathcal{F}_\kappa^W(f) \in L^1(\mu_\kappa^W) \right\}$$

qui est contenu dans l'intersection de $L^1(\mu_\kappa^W)$ et de L^∞ et qui est donc à ce titre un sous-ensemble de $L^2(\mu_\kappa^W)$. Sur cet espace $\mathscr{A}_\kappa^W$, on peut définir ponctuellement l'opérateur de translation généralisé grâce à la formule d'inversion, à savoir

$$\tau_x^{W,\kappa} f(y) = c_\kappa^W \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(ix,z) E_\kappa^W(iy,z) \mathcal{F}_\kappa^W(f)(z) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(z).$$

C'est d'ailleurs au moyen de cette égalité que Rösler a défini sur l'espace de Schwartz la translation de Dunkl (voir [40]). Les propriétés basiques vérifiées par cet opérateur sont les suivantes.

Proposition 1.25. *1. Soit $f \in \mathscr{A}_\kappa^W(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$\tau_x^{W,\kappa} f(y) = \tau_y^{W,\kappa} f(x).$$

2. Soit $f \in \mathscr{A}_\kappa^W(\mathbb{R}^d)$ et soit $g \in L^1(\mu_\kappa^W)$ bornée. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau_x^{W,\kappa} f(y) g(y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_{-x}^{W,\kappa} g(y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y).$$

Dans le cadre de l'analyse classique, l'opérateur de translation vérifie l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau_x f(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \, \mathrm{d}y,$$

et on sait aussi qu'il est L^p-borné.
Pour ce qui est du cadre de l'analyse de Dunkl, les résultats analogues les plus généraux dont on dispose à l'heure actuelle sont énoncés dans le théorème suivant, prouvé en 2005 par Thangavelu et Xu ([56]). On désigne par $L^p_{\mathrm{rad}}(\mu_\kappa^W)$ l'ensemble des fonctions radiales de $L^p(\mu_\kappa^W)$.

Théorème 1.26. *1. Pour tout p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la translation de Dunkl $\tau_x^{W,\kappa} : L^p_{\mathrm{rad}}(\mu_\kappa^W) \to L^p(\mu_\kappa^W)$ est un opérateur borné.*

2. Soit $f \in L^1_{\mathrm{rad}}(\mu_\kappa^W)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau_x^{W,\kappa} f(y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y).$$

Pour prouver ce théorème, l'un des principaux arguments utilisés est le fait que si $f \in \mathscr{A}_\kappa^W(\mathbb{R}^d)$ est radiale (avec $f(y) = F(\|y\|)$), alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la translation de Dunkl $\tau_x^{W,\kappa}$ est donnée par la formule suivante

$$\tau_x^{W,\kappa} f(y) = V_\kappa^W\Big(F\big(\sqrt{\|x\|^2 + \|\cdot\|^2 + 2\langle x, \cdot\rangle}\big)\Big)(y). \tag{1.4}$$

Cette formule explicite de la translation de fonctions radiales a été démontrée par Rösler en 2003 (voir [44]). L'autre cas dans lequel la translation généralisée est connue de manière explicite est le cas de la dimension un. On le présente dans le théorème suivant, qui est également dû à Rösler ([39]).

Théorème 1.27. *Soit $x \in \mathbb{R}$. L'opérateur $\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ est donné pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ par*

$$\begin{aligned}\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa} f(y) = {} & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\Big(\sqrt{x^2+y^2+2xyt}\Big)\Big(1 + \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+2xyt}}\Big)\psi_\kappa(t)\,\mathrm{d}t \\ & + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\Big(-\sqrt{x^2+y^2+2xyt}\Big)\Big(1 - \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+2xyt}}\Big)\psi_\kappa(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{1.5}$$

avec $\psi_\kappa(t) = \mathscr{B}^{-1}\big(\kappa, \frac{1}{2}\big)(1+t)(1-t^2)^{\kappa-1}$.

Cette égalité repose sur une formule produit du noyau de Dunkl unidimensionnel que Rösler a prouvée dans le cadre des hypergroupes signés de type Bessel sur $\mathbb{R}$. Nous reviendrons sur cette formule produit dans le chapitre 2 et dans le chapitre 4. On peut déduire de la formule (1.5) le fait essentiel que l'opérateur généralisé de translation est un opérateur $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$-borné. Plus précisément, on a l'énoncé suivant ([39]).

Théorème 1.28. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Pour tout $f \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$ on a*

$$\|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa} f\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,p} \leqslant 4\|f\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,p}.$$

Remarque 1.29. Récemment, Amri, Anker et Sifi ont donné dans [3] une estimation optimale, à savoir

$$\|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa} f\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,p} \leqslant \left(\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\big(\kappa+\frac{1}{2}\big)^2}{\Gamma\big(\kappa+\frac{1}{4}\big)\Gamma\big(\kappa+\frac{3}{4}\big)}\right)^{2\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}\|f\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,p}.$$

Une discussion sur le cas $\mathbb{Z}_2^d$ sera faite dans le chapitre 2.

Étude de la positivité de la translation de Dunkl Dans le cadre classique, la translation usuelle est évidemment un opérateur positif, c'est-à-dire

$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \tau_x f \geqslant 0.$$

Malheureusement, la translation de Dunkl n'est pas, de manière générale, un opérateur positif. En effet, la formule (1.5) en atteste lorsque le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2$. Thangavelu et Xu ont également réussi à démontrer dans [56] que la translation de Dunkl n'est pas un opérateur positif dans un cas où une formule explicite de la translation n'est pas connue (celui du groupe de réflexions $\mathfrak{S}_d$).
Il existe cependant des cas où l'on peut affirmer que la translation généralisée est positive. Puisque l'opérateur d'entrelacement est positif, la formule (1.4) entraîne que la translatée de Dunkl d'une fonction radiale, positive et élément de $\mathscr{A}_\kappa^W(\mathbb{R}^d)$ est une fonction positive. En fait, le résultat le plus général dont on dispose est le suivant. Il est dû à Thangavelu et Xu (voir [56]).

Théorème 1.30. *Soit $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$ une fonction bornée, radiale et positive. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $\tau_x^{W,\kappa} f \geqslant 0$.*

Nous allons maintenant introduire l'opérateur de convolution généralisé.

1.5.2 Convolution de Dunkl

L'opérateur de convolution généralisé est défini classiquement au moyen de la translation de Dunkl.

Définition 1.31. Soit $f, g \in L^2(\mu_\kappa^W)$. On définit la convolution généralisée par

$$(f \underset{W,\kappa}{*} g)(x) = c_\kappa^W \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{W,\kappa}(g)(-y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

On dira que $\underset{W,\kappa}{*}$ est la convolution de Dunkl.

Cet opérateur, qui coïncide avec la convolution usuelle lorsque $\kappa = 0$, a été principalement étudié par Rösler dans [40], par Trimèche dans [57] et plus récemment par Thangavelu et Xu dans [56]. Les propriétés basiques dont on dispose sont les suivantes.

Proposition 1.32. *Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a*

1. $f \underset{W,\kappa}{*} g = g \underset{W,\kappa}{*} f$.
2. $\mathcal{F}_\kappa^W(f \underset{W,\kappa}{*} g) = \mathcal{F}_\kappa^W(f)\mathcal{F}_\kappa^W(g)$.

On cherche à savoir sous quelle(s) condition(s) sur g l'opérateur

$$f \mapsto f \underset{W,\kappa}{*} g$$

s'étend à $L^p(\mu_\kappa^W)$ en un opérateur borné. Ce problème est bien évidemment lié à celui de l'extension de la translation de Dunkl en un opérateur borné. La réponse la plus générale que l'on ait à l'heure actuelle est la suivante (voir [56]).

Théorème 1.33. *Soit $g \in L^1_{\text{rad}}(\mu_\kappa^W)$ une fonction bornée. Alors l'opérateur $f \mapsto f \underset{W,\kappa}{*} g$ défini initialement sur $L^1(\mu_\kappa^W) \cap L^2(\mu_\kappa^W)$ s'étend à tout $L^p(\mu_\kappa^W)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, en un opérateur borné. En particulier, on a*

$$\|f \underset{W,\kappa}{*} g\|_{W,\kappa,p} \leqslant c_\kappa^W \|f\|_{W,\kappa,p} \|g\|_{W,\kappa,1}.$$

Signalons que, dans le cas unidimensionnel, des inégalités de type Young peuvent être établies pour l'opérateur de convolution dans la mesure où la translation de Dunkl est $L^p(\mu_\kappa^W)$-bornée.

Le noyau de la chaleur généralisé On introduit dans ce paragraphe le semi-groupe de la chaleur généralisé. Partons du problème suivant.
On cherche des fonctions $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \times]0, +\infty[) \cap \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[)$ qui sont solutions du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur généralisée, à savoir

$$(CH)_\kappa : \begin{cases} \Delta_\kappa^W u(x,t) & = \partial_t u(x,t) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times]0, +\infty[\\ u(\cdot, 0) & = f \end{cases}$$

avec la donnée initiale $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Le système $(CH)_0$ correspond bien sûr au problème classique lié à l'équation de la chaleur pour le Laplacien usuel. Dans ce cadre bien connu, la solution fondamentale de l'équation de la chaleur $\Delta u(x,t) = \partial_t u(x,t)$ est donnée sur $\mathbb{R}^d \times]0,+\infty[$ par la gaussienne

$$q_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \,\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}},$$

et on obtient les solutions de $(CH)_0$ en convolant f avec la gaussienne q_t.
Dans le cadre de l'analyse de Dunkl, on procède de la même manière.
Commençons par remarquer qu'une solution évidente de l'équation $\Delta_\kappa^W u(x,t) = \partial_t u(x,t)$ est donnée sur $\mathbb{R}^d \times]0,+\infty[$ par la gaussienne généralisée définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$q_t^{W,\kappa}(x) = \frac{c_\kappa^W}{(2t)^{\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}}} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}. \tag{1.6}$$

Cette fonction vérifie les deux propriétés suivantes.

Proposition 1.34. *1. Pour tout $t > 0$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} q_t^{W,\kappa}(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) = 1.$$

2. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{F}_\kappa^W(q_t^{W,\kappa})(x) = c_\kappa^W \,\mathrm{e}^{-t\|x\|^2}.$$

Le premier point repose sur un simple calcul. Quant au second, c'est une conséquence immédiate de la formule reproduisante suivante du noyau de Dunkl (voir [19])

$$c_\kappa^W \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(x,z) E_\kappa^W(y,z) \mathrm{e}^{-\frac{\|z\|^2}{2}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(z) = \mathrm{e}^{\frac{\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle}{2}} E_\kappa^W(x,y), \quad x,y \in \mathbb{C}^d.$$

On considère maintenant, par analogie avec le cas classique, la translatée de Dunkl de la gaussienne généralisée (qui apparaît naturellement lorsque l'on convole au sens de Dunkl au moyen de $q_t^{W,\kappa}$). La formule reproduisante précédemment citée permet de démontrer que

$$\tau_x^{W,\kappa}(q_t^{W,\kappa})(-y) = \frac{c_\kappa^W}{(2t)^{\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}}} \mathrm{e}^{-\frac{(\|x\|^2+\|y\|^2)}{4t}} E_\kappa^W\Big(\frac{x}{\sqrt{2t}}, \frac{y}{\sqrt{2t}}\Big).$$

On est ainsi naturellement amené à définir (comme dans [40]) le noyau de la chaleur généralisé comme suit.

Définition 1.35. Le noyau de la chaleur généralisé (ou noyau de la chaleur de type Dunkl) Q_κ^W est défini par

$$Q_\kappa^W(x,y,t) = \frac{c_\kappa^W}{(2t)^{\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}}} \mathrm{e}^{-\frac{(\|x\|^2+\|y\|^2)}{4t}} E_\kappa^W\Big(\frac{x}{\sqrt{2t}}, \frac{y}{\sqrt{2t}}\Big), \quad x,y \in \mathbb{R}^d, t > 0.$$

Remarque 1.36. Par application du théorème 1.16, on a directement $Q_\kappa^W > 0$.

On peut désormais introduire l'opérateur généralisé de la chaleur.

Définition 1.37. Pour $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$, avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et pour $t \geqslant 0$, on définit

$$H_t^{W,\kappa} f = \begin{cases} (c_\kappa^W)^{-1}(f \underset{W,\kappa}{*} q_t^{W,\kappa}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) Q_\kappa^W(\cdot, y, t)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) & \text{si } t > 0 \\ f & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On dira que $H_t^{W,\kappa}$ est l'opérateur de la chaleur généralisé (ou opérateur de la chaleur de type Dunkl).

Le résultat fondamental concernant cet opérateur est le suivant. Il est dû à Rösler (voir [42] et [40]).

Théorème 1.38. *Pour tout p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, la famille $\{H_t^{W,\kappa}\}_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe positif et contractant sur $L^p(\mu_\kappa^W)$.*
De plus, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la fonction u définie pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[$ par

$$u(x,t) = H_t^{W,\kappa} f(x)$$

appartient à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \times]0, +\infty[) \cap \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[)$ et est solution du problème de Cauchy $(CH)_\kappa$.

On peut sans difficulté apporter la précision suivante.

Théorème 1.39. *Pour tout p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, la famille $\{H_t^{W,\kappa}\}_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe symétrique de diffusion sur $L^p(\mu_\kappa^W)$, c'est-à-dire que le semi-groupe $\{H_t^{W,\kappa}\}_{t \geqslant 0}$ vérifie les propriétés suivantes*

1. *$H_t^{W,\kappa}$ est contractant sur $L^p(\mu_\kappa^W)$, avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$;*
2. *$H_t^{W,\kappa}$ est symétrique, c'est-à-dire autoadjoint sur $L^2(\mu_\kappa^W)$;*
3. *$H_t^{W,\kappa}$ est positif;*
4. *$H_t^{W,\kappa}(1) = 1$.*

Nous renvoyons au livre de Stein [50] pour une étude détaillée de ce type de semi-groupe.

Chapitre 2

Inégalités de Fefferman-Stein pour l'opérateur maximal de Dunkl associé à $\mathbb{Z}_2^d$

Le principal but de ce chapitre est de démontrer dans le cadre de l'analyse de Dunkl des inégalités de Fefferman-Stein pour un opérateur maximal défini classiquement au moyen des mesures μ_κ^W et de la translation de Dunkl. Ces inégalités, qui constituent un outil fondamental en analyse harmonique, généralisent dans un cadre vectoriel le théorème maximal (scalaire) prouvé par Thangavelu et Xu ([56]). Cependant, comme la grande majorité des résultats de la théorie de Dunkl, nous ne pourrons démontrer ces inégalités que dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$. La méconnaissance de l'opérateur de translation généralisé empêche à l'heure actuelle d'énoncer un théorème de Fefferman-Stein en toutes généralités. Pour autant, démontrer ces inégalités dans le cadre $\mathbb{Z}_2^d$ où l'opérateur de translation est mieux cerné est loin d'être une évidence car la structure de la translation de Dunkl ne permet pas la mise en œuvre des outils d'analyse réelle.
Le contenu du chapitre est le suivant. Dans un premier temps, nous introduirons, pour un groupe de réflexions quelconque, l'opérateur maximal de Dunkl pour lequel un théorème maximal a été démontré. Nous apporterons alors des précisions sur la taille des constantes de ce théorème. Nous présenterons en détails dans une deuxième section le cadre de travail dans lequel nous établirons les inégalités de Fefferman-Stein, à savoir $\mathbb{Z}_2^d$. On démontrera en particulier une inégalité fondamentale pour la translatée de Dunkl de la fonction caractéristique d'une boule euclidienne de rayon r centrée en l'origine. La troisième section sera quant à elle consacrée à l'énoncé et à la démonstration des inégalités de Fefferman-Stein. On donnera enfin dans une dernière section une extension de ces inégalités à une plus large classe d'opérateurs liés à l'analyse de Dunkl.
Signalons que ce chapitre contient entre autres les résultats publiés dans [12].

2.1 Opérateur maximal de Dunkl

Dans cette section, nous allons introduire l'opérateur maximal de Dunkl associé à un groupe de réflexions et présenter le théorème maximal prouvé en 2005 par Thangavelu et Xu. Nous apporterons des précisions sur les constantes de ce théorème.

2.1.1 Définition et théorème maximal

Commençons par donner la définition de l'opérateur maximal de Dunkl qui a été introduit dans [56].

Définition 2.1. Soit $f \in L^2(\mu_\kappa^W)$. La fonction maximale de Dunkl associée à f et W, notée $M_\kappa^W f$, est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$M_\kappa^W f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \right|.$$

L'opérateur M_κ^W est l'opérateur maximal de Dunkl associé au groupe de réflexions W.

Dans le cas où la fonction de multiplicité κ est nulle, on retrouve l'opérateur maximal classique introduit en 1930 par Hardy et Littlewood dans un cadre unidimensionnel (voir [27]) et généralisé en dimension supérieure par Wiener en 1939 (voir [59]). Le résultat suivant, dû à Thangavelu et Xu ([56]), discute du caractère $L^p(\mu_\kappa^W)$-borné de l'opérateur maximal de Dunkl. Il généralise le théorème maximal classique (aussi appelé théorème de Hardy-Littlewood).

Théorème 2.2. *Soit f une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Si $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^W \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > \lambda \right\} \right) \leqslant \frac{C}{\lambda} \|f\|_{W,\kappa,1},$$

où $C = C(d, \kappa)$ est une constante indépendante de f et de λ.

2. *Si $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$, avec $1 < p \leqslant +\infty$, alors $M_\kappa^W f \in L^p(\mu_\kappa^W)$ et on a*

$$\left\| M_\kappa^W f \right\|_{W,\kappa,p} \leqslant C \|f\|_{W,\kappa,p},$$

où $C = C(d, \kappa, p)$ est une constante indépendante de f.

Remarque 2.3. Signalons que même le cas où $p = +\infty$ est loin d'être aisé. En effet, pour montrer que

$$\left\| M_\kappa^W f \right\|_{W,\kappa,\infty} \leqslant \|f\|_{W,\kappa,\infty},$$

on a besoin d'invoquer la positivité de la translation de Dunkl d'une fonction intégrable, bornée, radiale et positive ainsi que le résultat non trivial suivant (application du théorème 1.26)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B_r}(y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y).$$

Comme dans le cas usuel, un résultat de type fort est faux pour $p = 1$. Localement, on peut tout de même énoncer le résultat d'intégrabilité suivant.

Proposition 2.4. *Soit B une boule de $\mathbb{R}^d$ et soit $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$. Supposons que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \log^+ |f(x)| \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) < +\infty,$$

où l'on a noté $\log^+ t = \max\{\log t; 0\}$. Alors

$$\int_B M_\kappa^W f(x) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) < +\infty.$$

Plus précisément, on a l'inégalité suivante

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + C\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\log^+|f(x)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x),$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f et de B.

Démonstration. En termes de fonction de répartition, on peut écrire

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) = \int_0^{+\infty} \mu_\kappa^W\Big(\Big\{x\in B : M_\kappa^W f(x) > \lambda\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda,$$

égalité de laquelle on peut déduire que

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + 2\int_1^{+\infty} \mu_\kappa^W\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > 2\lambda\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Pour tout $\lambda > 0$, écrivons $f = f_\lambda + (f - f_\lambda)$ où $f_\lambda = f\chi_{\{|f|>\lambda\}}$. Puisque l'on a d'une part

$$M_\kappa^W f \leqslant M_\kappa^W|f_\lambda| + M_\kappa^W|f - f_\lambda|,$$

et $M_\kappa^W|f - f_\lambda| \leqslant \lambda$ d'autre part (car M_κ^W est $L^\infty(\mu_\kappa^W)$-contractant), on peut affirmer que

$$\Big\{x\in\mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > 2\lambda\Big\} \subset \Big\{x\in\mathbb{R}^d : M_\kappa^W|f_\lambda|(x) > \lambda\Big\}.$$

Par conséquent

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + 2\int_1^{+\infty} \mu_\kappa^W\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : M_\kappa^W|f_\lambda|(x) > \lambda\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

En utilisant la première assertion du théorème 2.2, on obtient

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + C\int_1^{+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x)\,\mathrm{d}\lambda,$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f, de B et de λ. Après interversion puis intégration, on aboutit à

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + C\int_{\{|f|>1\}} |f(x)|\log|f(x)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x),$$

ce qui est bien le résultat escompté. □

Revenons au théorème maximal (théorème 2.2). À l'heure actuelle, une preuve basée sur une méthode combinant des arguments de recouvrement et d'interpolation semble, pour un groupe de réflexions quelconque, hors de portée, tout comme une théorie des intégrales singulières dans le contexte de l'analyse de Dunkl semble hors de portée. Cela est dû à la structure de la translation de Dunkl qui ne permet pas la mise en œuvre des outils classiques d'analyse réelle, et ce, bien que les mesures μ_κ^W soient doublantes. Pour démontrer le théorème maximal en toute généralité, Thangavelu et Xu ont réussi à contourner le problème en contrôlant l'opérateur maximal de Dunkl au moyen de l'opérateur maximal associé au semi-groupe de la chaleur de type Dunkl afin d'utiliser le théorème ergodique de Hopf-Dunford-Schwartz. Cette technique est due à Stein ([50]). Plus précisément, ils ont démontré l'inégalité ponctuelle suivante

$$M_\kappa^W f(x) \leqslant C(d,\kappa)\sup_{t>0}\left(\frac{1}{t}\int_0^t H_s^{W,\kappa}|f|(x)\,\mathrm{d}s\right)$$

afin d'appliquer le théorème ergodique que nous énonçons maintenant (pour des informations sur ce théorème, nous renvoyons le lecteur à [14]).

Théorème 2.5. *Soit X un espace mesurable et soit m une mesure positive sur X. Soit $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe d'opérateurs sur $L^p(X;m)$. Pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout $f \in L^p(X;m)$ on suppose que*

$$\|T_t f\|_{L^p(X;m)} \leqslant \|f\|_{L^p(X;m)},$$

et on note $\mathscr{M}f$ la fonction définie par

$$\mathscr{M}f(x) = \sup_{t>0}\left|\frac{1}{t}\int_0^t T_s f(x)\,\mathrm{d}s\right|.$$

1. *Si $f \in L^1(X;m)$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$m\Big(\Big\{x \in X : \mathscr{M}f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(X;m)}.$$

2. *Si $f \in L^p(X;m)$, $1 < p \leqslant +\infty$, alors $\mathscr{M}f \in L^p(X;m)$ et on a*

$$\big\|\mathscr{M}f\big\|_{L^p(X;m)} \leqslant C\|f\|_{L^p(X;m)},$$

où $C = C(p)$ est une constante indépendante de f.

Si l'utilisation de ce théorème ne permet pas d'établir des inégalités de Fefferman-Stein, il permet en revanche d'être plus précis quant à la taille des constantes dans le théorème maximal. C'est ce que nous allons voir maintenant dans une nouvelle sous-section.

2.1.2 Discussion sur la taille des constantes du théorème maximal

Les théorèmes que nous allons présenter dans cette sous-section généralisent certains résultats démontrés par Stein et Strömberg pour la fonction maximale usuelle (voir [48]). Nous nous inspirons d'ailleurs de leur stratégie de preuve.
Nous supposerons $\gamma_{\mathcal{R}} > 0$ car le cas $\gamma_{\mathcal{R}} = 0$ correspond au cas classique.

Lorsque $p = 1$, on donne la version suivante du théorème maximal 2.2.

Théorème 2.6. *Il existe une constante numérique C telle que pour tout $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$ et pour tout $\lambda > 0$*

$$\mu_\kappa^W\left(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > \lambda\Big\}\right) \leqslant C\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{\lambda}\|f\|_{W,\kappa,1}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons avoir besoin de deux lemmes. Le premier est purement calculatoire. Avant de l'énoncer et de le prouver, nous introduisons des notations commodes.

Notations 2.7. On désignera par $a(h_W, S^{d-1})$ la masse de la sphère S^{d-1} pour la mesure $h_{W,\kappa}^2\,\mathrm{d}\omega$ (avec ω la mesure de surface sur S^{d-1}), c'est-à-dire

$$a(h_W, S^{d-1}) = \int_{S^{d-1}} h_{W,\kappa}^2(x)\,\mathrm{d}\omega(x).$$

On utilisera également la notation suivante

$$q_t^{W,\kappa}|_{S^{d-1}} = \frac{c_\kappa^W}{(2t)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}}.$$

On en vient dorénavant à l'énoncé du premier lemme.

Lemme 2.8. *On a les égalités suivantes*

$$\mu_\kappa^W(B_1) = \frac{a(h_W, S^{d-1})}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}};$$
$$(c_\kappa^W)^{-1} = 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\Big)a(h_W, S^{d-1});$$
$$\int_0^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t = \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\Big).$$

De plus, si on suppose $d+2\gamma_{\mathcal{R}} \geqslant 8$, alors on a l'inégalité suivante

$$\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\Big(\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\mathrm{e}^{-\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}}.$$

Démonstration. Les trois premières égalités sont évidentes par passage en coordonnées polaires et changement de variable. Prouvons seulement l'inégalité. Par définition, on a

$$\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t = c_\kappa^W\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty}\frac{1}{(2t)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui donne après changement de variable

$$\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t = \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\int_0^{\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}} t^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $d+2\gamma_{\mathcal{R}} \geqslant 8$ et pour tout $t \in [0, \frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}]$ on a

$$t^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-2}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \Big(\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-2}\mathrm{e}^{-\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}}.$$

Par conséquent

$$\int_0^{\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}} t^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \Big(\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\mathrm{e}^{-\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}},$$

et l'inégalité est ainsi prouvée. □

Le second lemme va quant à lui permettre de réduire l'inégalité du théorème 2.6 à une inégalité plus simple.

Lemme 2.9. *Supposons qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que*

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant \frac{C(d,\kappa)}{t_0}\int_0^{t_0} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t.$$

On a alors pour tout $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$ et pour tout $\lambda > 0$ l'inégalité faible suivante

$$\mu_\kappa^W\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant 4\frac{C(d,\kappa)}{\lambda}\|f\|_{W,\kappa,1},$$

où $C(d,\kappa)$ est la même constante dans l'hypothèse et dans la conclusion du lemme.

Démonstration. Remarquons que l'on peut considérer f positive. Supposons qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant \frac{C(d,\kappa)}{t_0} \int_0^{t_0} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}} \, \mathrm{d}t.$$

On peut donc dire que pour n suffisamment grand

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{t_0} \int_{\frac{1}{n}}^{t_0} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}} \, \mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Alors on peut affirmer que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \chi_{B_1}(y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{t_0} \int_{\frac{1}{n}}^{t_0} q_t^{W,\kappa}(y) \, \mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

En effet, si $\|y\| > 1$, l'inégalité (2.2) est évidente puisque $\chi_{B_1}(y) = 0$ et que le membre de droite est positif. Dans le cas où $\|y\| \leqslant 1$, il suffit d'utiliser l'inégalité (2.1) et le fait que $q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}} \leqslant q_t^{W,\kappa}(y)$.
Par conséquent, on peut écrire pour tout $r > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$ que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \chi_{B_r}(y) = \frac{1}{r^{d+2\gamma_{\mathcal{R}}} \mu_\kappa^W(B_1)} \chi_{B_1}\left(\frac{y}{r}\right) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^{d+2\gamma_{\mathcal{R}}} t_0} \int_{\frac{1}{n}}^{t_0} q_t^{W,\kappa}\left(\frac{y}{r}\right) \mathrm{d}t.$$

Après changement de variable on obtient

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \chi_{B_r}(y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(y) \, \mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Par positivité de la translation de Dunkl sur l'ensemble des fonctions qui sont bornées, radiales, positives et éléments de $L^1(\mu_\kappa^W)$, on a

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot) \, \mathrm{d}t \right)(-y).$$

On admet provisoirement que

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot) \, \mathrm{d}t \right)(-y) = \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} \tau_x^{W,\kappa}(q_t^{W,\kappa})(-y) \, \mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

On peut alors écrire que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} \tau_x^{W,\kappa}(q_t^{W,\kappa})(-y) \, \mathrm{d}t.$$

En multipliant par $f(y)$ puis en intégrant sur $\mathbb{R}^d$ on aboutit à

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} H_t^{W,\kappa} f(x) \, \mathrm{d}t$$

puis à

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \int_0^{r^2 t_0} H_t^{W,\kappa} f(x) \, \mathrm{d}t.$$

On en déduit bien évidemment que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \leqslant 2C(d,\kappa)\sup_{s>0}\left(\frac{1}{s}\int_0^s H_t^{W,\kappa}f(x)\,\mathrm{d}t\right),$$

et donc

$$M_\kappa^W f(x) \leqslant 2C(d,\kappa)\sup_{s>0}\left(\frac{1}{s}\int_0^s H_t^{W,\kappa}f(x)\,\mathrm{d}t\right).$$

Puisque $\{H_t^{W,\kappa}\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe contractant sur $L^p(\mu_\kappa^W)$, la première assertion du théorème ergodique de Hopf-Dunford-Schwartz (théorème 2.5) permet de conclure. Il nous reste à prouver l'égalité (2.3).

On a bien évidemment $\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t \in L^1(\mu_\kappa^W)$ (par utilisation de la proposition 1.34) donc d'après le premier point du théorème 1.26

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right) \in L^1(\mu_\kappa^W).$$

Puisque l'on a d'une part

$$\mathcal{F}_\kappa^W\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} \mathrm{e}^{-t\|\cdot\|^2}\,\mathrm{d}t \in L^1(\mu_\kappa^W),$$

et d'autre part

$$\mathcal{F}_\kappa^W\left(\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)\right) = E_\kappa^W(ix,\cdot)\,\mathcal{F}_\kappa^W\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right),$$

alors

$$\mathcal{F}_\kappa^W\left(\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)\right) \in L^1(\mu_\kappa^W).$$

Par conséquent, $\tau_x^{W,\kappa}\big(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\big) \in \mathscr{A}_\kappa^W(\mathbb{R}^d)$ et d'après la formule d'inversion

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)(y) = c_\kappa^W\int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} \mathrm{e}^{-t\|z\|^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(z),$$

soit après interversion

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)(y) = \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0}\left(c_\kappa^W\int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\mathrm{e}^{-t\|z\|^2}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(z)\right)\mathrm{d}t.$$

En utilisant à nouveau la formule d'inversion on aboutit à

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)(y) = \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2t_0} \tau_x^{W,\kappa}(q_t^{W,\kappa})(y)\,\mathrm{d}t.$$

L'égalité (2.3) est donc vraie, et le lemme est entièrement démontré. $\square$

Nous pouvons désormais prouver le théorème 2.6.

Démonstration. D'après le lemme 2.9, il nous suffit de trouver un t_0 de telle sorte que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{t_0}\int_0^{t_0} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

Prenons $t_0 = \frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}$. On sait d'après l'inégalité du lemme 2.8 que l'on a dans le cas où $d+2\gamma_{\mathcal{R}} \geqslant 8$

$$\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\Big(\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\mathrm{e}^{-\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}}.$$

D'une part, la formule de Stirling permet de montrer que

$$\Big(\frac{n}{4}\Big)^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{n}{4}} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\Big(\Gamma\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\Big),$$

et, d'autre part, on sait d'après la troisième égalité du lemme 2.8 que

$$\int_0^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t = \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\Big).$$

Par conséquent, on peut conclure qu'il existe une constante numérique C telle que

$$c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\Big) \leqslant C\int_0^{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

En utilisant les deux premières égalités du lemme 2.8, on peut écrire

$$c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\Big) = \frac{2\,\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\big)}{\mu_\kappa^W(B_1)(d+2\gamma_{\mathcal{R}})\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\big)},$$

et, en injectant cette nouvelle égalité dans (2.5) on aboutit alors à

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C\frac{(d+2\gamma_{\mathcal{R}})\,\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\big)}{\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\big)}\int_0^{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui implique finalement que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C(d+2\gamma_{\mathcal{R}})^2\int_0^{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc prouvé (2.4) et le théorème est ainsi démontré. □

On en vient à présent au second théorème de cette sous-section. Il apporte des précisions sur la constante du théorème maximal dans le cas où $1 < p \leqslant +\infty$. Le résultat est le suivant.

Théorème 2.10. *Il existe une constante numérique C telle que pour tout p vérifiant $1 < p \leqslant +\infty$ et tout $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$*

$$\big\|M_\kappa^W f\big\|_{W,\kappa,p} \leqslant C\Big(\frac{p}{p-1}\Big)\sqrt{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}\,\|f\|_{W,\kappa,p}.$$

Remarquons que cette inégalité est plus fine que celle que l'on obtiendrait en utilisant le théorème 2.6, le cas L^∞ et un argument d'interpolation. Pour prouver le théorème, nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 2.11. *Supposons qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que*

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C(d,\kappa) q_{t_0}^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}.$$

Alors il existe une constante numérique C telle que pour tout p vérifiant $1 < p \leqslant +\infty$ et tout $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$

$$\left\|M_\kappa^W f\right\|_{W,\kappa,p} \leqslant C\Big(\frac{p}{p-1}\Big) C(d,\kappa) \left\|f\right\|_{W,\kappa,p},$$

où $C(d,\kappa)$ est la même constante dans l'hypothèse et dans la conclusion du lemme.

Démonstration. La démonstration est proche de celle du lemme 2.9. On peut supposer f positive. S'il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C(d,\kappa) q_{t_0}^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}, \tag{2.6}$$

alors on peut en déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \chi_{B_1}(y) \leqslant C(d,\kappa) q_{t_0}^{W,\kappa}(y). \tag{2.7}$$

En effet, si $\|y\| > 1$, l'inégalité (2.7) est évidente puisque $\chi_{B_1}(y) = 0$ et que le membre de droite est positif. Dans le cas où $\|y\| \leqslant 1$, il suffit d'utiliser l'inégalité (2.6) et le fait que $q_{t_0}^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}} \leqslant q_{t_0}^{W,\kappa}(y)$.
Par conséquent, pour tout $r > 0$, on peut écrire

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \chi_{B_r}(y) = \frac{1}{r^{d+2\gamma_\mathcal{R}} \mu_\kappa^W(B_1)} \chi_{B_1}\Big(\frac{y}{r}\Big) \leqslant \frac{C(d,\kappa)}{r^{d+2\gamma_\mathcal{R}}} q_{t_0}^{W,\kappa}\Big(\frac{y}{r}\Big) = C(d,\kappa) q_{r^2 t_0}^{W,\kappa}(y).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Par positivité de la translation de Dunkl sur l'ensemble des fonctions qui sont bornées, radiales, positives et éléments de $L^1(\mu_\kappa^W)$, on a

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y)) \leqslant C(d,\kappa) \tau_x^{W,\kappa}(q_{r^2 t_0}^{W,\kappa})(-y).$$

En multipliant par $f(y)$ puis en intégrant sur $\mathbb{R}^d$ on aboutit à

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \leqslant C(d,\kappa) H_{r^2 t_0}^{W,\kappa} f(x)$$

dont on déduit que

$$M_\kappa^W f(x) \leqslant C(d,\kappa) \sup_{t>0} H_t^{W,\kappa} f(x). \tag{2.8}$$

Or, $\{H_t^{W,\kappa}\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe symétrique de diffusion (d'après le théorème 1.39) : on sait donc d'après un résultat dû à Stein (voir [50, chapitre 4]) qu'il vérifie pour tout $1 < p \leqslant +\infty$

$$\big\|\sup_{t>0} H_t^{W,\kappa} f\big\|_{W,\kappa,p} \leqslant C\Big(\frac{p}{p-1}\Big) \big\|f\big\|_{W,\kappa,p},$$

avec C une constante numérique. On aboutit au résultat en utilisant cette inégalité dans l'inégalité ponctuelle (2.8). ☐

Venons-en maintenant à la preuve du théorème 2.10.

Démonstration. D'après le lemme précédent, il nous suffit de trouver $t_0 > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C\sqrt{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}\, q_{t_0}^{W,\kappa}{}_{|S^{d-1}}$$

c'est-à-dire tel que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C c_\kappa^W \sqrt{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}\Big(\frac{1}{2t_0}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4t_0}}.$$

D'une part, les deux premières égalités du lemme 2.8 permettent d'affirmer que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} = c_\kappa^W (d+2\gamma_{\mathcal{R}}) 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\Big),$$

et d'autre part, la formule de Stirling donne l'estimation

$$2^{\frac{n}{2}}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\big(n^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}\big).$$

On obtient finalement le résultat souhaité en choisissant $t_0 = \frac{1}{2d+4\gamma_{\mathcal{R}}}$. □

2.2 Analyse associée au groupe $\mathbb{Z}_2^d$

Nous présentons de manière détaillée le cadre dans lequel nous allons énoncer et démontrer les inégalités de Fefferman-Stein, à savoir le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$. Les résultats de l'analyse de Dunkl sont en grande majorité démontrés dans ce cas particulier car c'est le seul où la connaissance explicite du noyau (produit des noyaux unidimensionnels) permet d'établir une formule produit pour celui-ci. De plus, on peut déduire de cette formule produit le caractère $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$-borné de l'opérateur de translation. C'est ce que nous allons maintenant présenter.

2.2.1 Formule produit et opérateur de translation

Rappelons pour commencer que se placer dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$ signifie que l'on considère le système positif de racines $\mathcal{R}_+ = \{e_j : 1 \leqslant j \leqslant d\}$ (le système de racines est $\mathcal{R} = \{\pm e_j : 1 \leqslant j \leqslant d\}$). La fonction de multiplicité κ prend d valeurs notées $\kappa_1, \dots, \kappa_d$ plutôt que $\kappa(e_1), \dots, \kappa(e_d)$. On supposera dans tout le chapitre que ces valeurs sont strictement positives. Le noyau de Dunkl est donné pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ et tout $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{C}^d$ par

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x,y) = \prod_{j=1}^d E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(x_j, y_j),$$

où le noyau unidimensionnel $E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}$ est donné pour x et y dans $\mathbb{C}$ par

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(x,y) = j_{\kappa-\frac{1}{2}}(ixy) + \frac{xy}{2\kappa+1} j_{\kappa+\frac{1}{2}}(ixy).$$

Enfin, la mesure considérée est

$$\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) = \Big(\prod_{j=1}^d |x_j|^{2\kappa_j}\Big)\,\mathrm{d}x = \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(x_j).$$

Introduisons maintenant plusieurs notations qui vont s'avérer utiles dans la suite de la discussion.

Notations 2.12. 1. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on pose

$$\rho_{x,y,z} = \begin{cases} \frac{1}{2xy}(x^2 + y^2 - z^2) & \text{si } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0, \end{cases}$$

et on note alors

$$\varrho(x, y, z) = \frac{1}{2}(1 - \rho_{x,y,z} + \rho_{z,x,y} + \rho_{z,y,x}).$$

2. Pour $x, y, z > 0$, on pose

$$K_\kappa(x, y, z) = 2^{2\kappa-2}\mathscr{B}^{-1}\Big(\kappa, \frac{1}{2}\Big)\frac{\Delta(x, y, z)^{2\kappa-2}}{(xyz)^{2\kappa-1}}\chi_{[|x-y|,x+y]}(z),$$

où $\Delta(x, y, z)$ désigne l'aire du triangle de côtés x, y, z, c'est-à-dire

$$\Delta(x, y, z) = \frac{1}{4}\sqrt{(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(y + z - x)}.$$

3. Pour x, y, z réels non nuls, on note enfin

$$\mathcal{K}_\kappa(x, y, z) = K_\kappa\big(|x|, |y|, |z|\big)\,\varrho(x, y, z).$$

Signalons les symétries évidentes du noyau $\mathcal{K}_\kappa$

$$\mathcal{K}_\kappa(x, y, z) = \mathcal{K}_\kappa(y, x, z) = \mathcal{K}_\kappa(-x, z, y) = \mathcal{K}_\kappa(-z, y, -x).$$

En ayant à l'esprit ces notations, nous pouvons désormais énoncer une formule produit pour le noyau de Dunkl unidimensionnel. Ce résultat fondamental est dû à Rösler ([39]) et a été prouvé dans le cadre des hypergroupes signés de type Bessel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.13. *Soit $x, y \in \mathbb{R}$.*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{R}$ on a*

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix, z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iy, z) = \int_{\mathbb{R}} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iz, z')\,\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(z'),$$

où la mesure $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ est donnée par

$$\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(z') = \begin{cases} \mathcal{K}_\kappa(x, y, z')\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z') & si\ x, y \neq 0 \\ \mathrm{d}\delta_x(z') & si\ y = 0 \\ \mathrm{d}\delta_y(z') & si\ x = 0. \end{cases}$$

2. *La mesure $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ satisfait*
   (a) $\operatorname{supp}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa} = \Big[-|x| - |y|, -\big||x| - |y|\big|\Big] \bigcup \Big[\big||x| - |y|\big|, |x| + |y|\Big]$ *pour $x, y \neq 0$.*
   (b) $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\mathbb{R}) = 1$ *et* $\|\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}\| = \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}| \leqslant 4$, *pour $x, y \in \mathbb{R}$.*

Remarque 2.14. Il est important de noter que les mesures $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ ne sont pas positives. En effet, pour x et y non nuls et tels que $x \neq y$, alors $\varrho(x, y, y - x) = -1$. Par conséquent, on peut trouver un voisinage de $y - x$ dans $\operatorname{supp}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ pour lequel la fonction $z \mapsto \mathcal{K}_\kappa(x, y, z)$ est strictement négative.

L'argument principal intervenant dans la preuve du théorème précédent est la formule produit suivante pour les fonctions de Bessel normalisées (pour $\alpha > -\frac{1}{2}$ et $x, y > 0$)

$$j_\alpha(x)j_\alpha(y) = \mathscr{B}^{-1}\Big(\alpha, \frac{1}{2}\Big) \int_0^\pi j_\alpha\Big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\Big) \sin^{2\alpha}\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

Du fait que le noyau de Dunkl associé à $\mathbb{Z}_2^d$ est le produit des noyaux unidimensionnels, on déduit trivialement du théorème 2.13 le résultat suivant.

Théorème 2.15. *Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. On a alors*

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(ix,z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(iy,z) = \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(iz,z') \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j'). \tag{2.9}$$

Comme conséquence importante de cette formule produit, on a une représentation intégrale de l'opérateur de translation généralisé sur l'espace de Schwartz qui va permettre d'étendre à tous les $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ la translation de Dunkl en un opérateur borné (cela illustre d'ailleurs le fait que formule produit et caractère borné de l'opérateur de translation sont intimement liés).

Proposition 2.16. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a la représentation intégrale suivante*

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j), \quad y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.10}$$

Démonstration. En appliquant la formule d'inversion du théorème 1.21 (ce qui est licite puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$), on peut écrire

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(f)(y) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(ix,z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(iy,z)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(f)(z) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z).$$

En utilisant la formule produit (2.9) et après interversion, on aboutit à

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(iz,z')\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(f)(z) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z) \Big) \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j').$$

On obtient le résultat escompté en utilisant de nouveau la formule d'inversion. $\square$

Remarque 2.17. Dans le cas où $d = 1$, signalons que la formule (2.10) coïncide à changement de variable près avec la formule (1.5).

La proposition 2.16 implique naturellement le théorème suivant.

Théorème 2.18. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. La translation de Dunkl $\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}$ s'étend à $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ en un opérateur borné qui vérifie*

$$\|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa} f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant 4^d \|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit $f \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$. Nous allons montrer que

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j) \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}).$$

Les cas $p=1$ et $p=+\infty$ étant évidents, on suppose $1<p<+\infty$. Soit alors q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. En écrivant

$$\Big|f(z)\prod_{j=1}^{d}\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)\Big| = |f(z)|\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|^{\frac{1}{p}}\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|^{\frac{1}{q}},$$

on obtient après utilisation de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\bigotimes_{j=1}^{d}\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j)\Big|^p\\ &\quad\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|^p\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z)\Big)^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.13 (point *2.(b)*), on en déduit que

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\bigotimes_{j=1}^{d}\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j)\Big|^p\leqslant 4^{\frac{dp}{q}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|^p\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z).$$

En intégrant et après interversion licite, on aboutit à

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\bigotimes_{j=1}^{d}\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j)\Big|^p\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\\ &\qquad\leqslant 4^{\frac{dp}{q}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|^p\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z).\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de symétrie de chaque $\mathcal{K}_{\kappa_j}$ et en utilisant à nouveau le théorème 2.13 (point *2.(b)*), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\bigotimes_{j=1}^{d}\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j)\Big|^p\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\leqslant 4^{\frac{dp}{q}+d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|^p\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z),$$

et le théorème est prouvé. □

Remarque 2.19. Tout comme pour la dimension un, Amri, Anker et Sifi donnent dans [3] une meilleure estimation de la borne, à savoir

$$\|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}\leqslant\left(\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\big(\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+\frac{1}{2}\big)^2}{\Gamma\big(\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+\frac{1}{4}\big)\Gamma\big(\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+\frac{3}{4}\big)}\right)^{2d|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}.$$

On peut montrer classiquement à partir du théorème 2.18 les inégalités de Young suivantes pour la convolution de Dunkl (voir [63] pour la preuve standard).

Corollaire 2.20. *Soit $p,q,r\in[1,+\infty]$ vérifiant*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}.$$

Alors l'application $(f,g) \mapsto f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} g$ *définie initialement sur* $L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}) \times L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ *s'étend en une application continue de* $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}) \times L^q(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ *dans* $L^r(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ *et on a*

$$\|f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r} \leqslant c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} 4^d \|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \|g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,q}.$$

Nous avons donc dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$ des outils puissants pour faire de l'analyse.

Nous allons montrer dans la sous-section suivante une estimation fine de la translatée de Dunkl de la fonction caractéristique d'une boule euclidienne de rayon r centrée en l'origine. Cette estimation va être un argument important dans la démonstration des inégalités de Fefferman-Stein.

2.2.2 Estimation de la translatée de Dunkl de χ_{B_r}

Avant d'énoncer le résultat fondamental de cette sous-section, nous avons besoin d'introduire la notation suivante.

Notation 2.21. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on désignera par $I(x,r)$ l'intervalle suivant

$$I(x,r) =]\max\{0; |x| - r\}, |x| + r[.$$

Ayant fixé cette notation, nous pouvons maintenant présenter l'estimation fine suivante.

Théorème 2.22. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$*, tout* $y \in \mathbb{R}^d$ *et tout* $r > 0$ *on a*

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant C \prod_{j=1}^{d} \frac{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)}{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(I(x_j,r))},$$

où $C = C(d,\kappa)$ *est une constante indépendante de* x, y, r.

Pour prouver ce théorème, nous allons avoir besoin du résultat unidimensionnel suivant.

Théorème 2.23. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, tout* $y \in \mathbb{R}$ *et tout* $r > 0$ *on a*

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant C \frac{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r))},$$

où $C = C(\kappa)$ *est une constante indépendante de* x, y, r.

Ce théorème, dû à Abdelkefi et Sifi ([1]), a été démontré en s'appuyant sur des résultats analogues dans le cadre des hypergroupes unidimensionnels de Chébli-Trimèche (voir l'article de Bloom et Xu [8]). Pour plus de clarté, nous en donnons ici une preuve dégagée de tout contexte d'hypergroupe. Nous allons avoir besoin de deux lemmes. Le premier est une estimation du noyau de Dunkl en dimension un.

Lemme 2.24. *Soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *et* $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *On a l'estimation suivante*

$$|E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,y)| \leqslant \frac{C}{|x|^\kappa |y|^\kappa},$$

où $C = C(\kappa)$ *est indépendante de* x *et* y.

Démonstration. Rappelons la formule explicite du noyau

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,y) = j_{\kappa-\frac{1}{2}}(xy) + \frac{ixy}{2\kappa+1} j_{\kappa+\frac{1}{2}}(xy),$$

égalité que l'on peut écrire sous la forme

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,y) = 2^{\kappa-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\kappa+\frac{1}{2}\Big)\frac{(xy)^{\frac{1}{2}}J_{\kappa-\frac{1}{2}}(xy)}{(xy)^\kappa} + \frac{ixy}{2\kappa+1}2^{\kappa+\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\kappa+\frac{3}{2}\Big)\frac{(xy)^{\frac{1}{2}}J_{\kappa+\frac{1}{2}}(xy)}{(xy)^{\kappa+1}}.$$

Or, on sait que pour tout $\alpha > -\frac{1}{2}$ (voir [55, page 167])

$$\sup_{x\geqslant 0}\Big(x^{\frac{1}{2}}|J_\alpha(x)|\Big) < +\infty.$$

En appliquant cet argument, on obtient le résultat. □

Le second lemme donne la transformée de Dunkl de la fonction caractéristique d'une boule euclidienne de rayon r centrée en l'origine. Nous donnons pour ce résultat connu (voir par exemple [56]) une nouvelle preuve. Signalons que nous énonçons le résultat en dimension d et pour un groupe de réflexions quelconque.

Lemme 2.25. *Soit $r > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{r^{d+2\gamma_\mathcal{R}}}{2^{\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}}\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}+1\big)|S^{d-1}|} j_{\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}}\big(r\|x\|\big).$$

Démonstration. Par définition de la transformée de Dunkl, on a

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = c_\kappa^W \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(-ix,y)\chi_{B_r}(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y).$$

En revenant à l'opérateur d'entrelacement, on écrit alors

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = c_\kappa^W \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}V_\kappa^W(\langle -ix,\cdot\rangle^n)(y)\chi_{B_r}(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y),$$

ce qui donne après interversion licite

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_\kappa^W}{n!}\int_{\mathbb{R}^d} V_\kappa^W(\langle -ix,\cdot\rangle^n)(y)\chi_{[0,r[}(\|y\|)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y). \tag{2.11}$$

Or, on dispose de la formule suivante (voir [23, page 196])

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} V_\kappa^W(\langle -ix,\cdot\rangle^n)(y)\chi_{[0,r[}(\|y\|)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y)\\ &\quad= \frac{\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}\big)a(h_W,S^{d-1})}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\gamma_\mathcal{R})|S^{d-1}|}\int_{\mathbb{R}^d}\langle -ix,y\rangle^n\bigg(\int_{\|y\|}^{+\infty}u\big(u^2-\|y\|^2\big)^{\gamma_\mathcal{R}-1}\chi_{[0,r[}(u)\,\mathrm{d}u\bigg)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité (2.11) peut s'écrire après interversion comme suit

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{c_\kappa^W\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}\big)a(h_W,S^{d-1})}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\gamma_\mathcal{R})|S^{d-1}|}\int_{\|y\|\leqslant r}\mathrm{e}^{\langle -ix,y\rangle}\bigg(\int_{\|y\|}^{r}u\big(u^2-\|y\|^2\big)^{\gamma_\mathcal{R}-1}\,\mathrm{d}u\bigg)\,\mathrm{d}y.$$

Après intégration on obtient

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{c_\kappa^W \Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\big) a(h_W, S^{d-1})}{2\pi^{\frac{d}{2}}\gamma_{\mathcal{R}}\Gamma(\gamma_{\mathcal{R}})|S^{d-1}|} \int_{\|y\|\leqslant r} \mathrm{e}^{\langle -ix,y\rangle}(r^2-\|y\|^2)^{\gamma_{\mathcal{R}}}\,\mathrm{d}y.$$

On utilise la deuxième égalité du lemme 2.8 afin de simplifier la constante et on utilise un changement de variable pour aboutir à

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{r^{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}{2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}\Gamma\big(\gamma_{\mathcal{R}}+1\big)\pi^{\frac{d}{2}}|S^{d-1}|} \int_{\|y\|\leqslant 1} \mathrm{e}^{\langle -irx,y\rangle}(1-\|y\|^2)^{\gamma_{\mathcal{R}}}\,\mathrm{d}y.$$

En utilisant maintenant la formule donnant la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto (1-|t|^2)^{\gamma_{\mathcal{R}}}\chi_{[0,1]}(|t|)$ (voir par exemple [52, page 171]) on en déduit que

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{r^{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}{2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}\Gamma\big(\gamma_{\mathcal{R}}+1\big)\pi^{\frac{d}{2}}|S^{d-1}|}\Big(2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}\Gamma\big(\gamma_{\mathcal{R}}+1\big)\pi^{\frac{d}{2}}(r\|x\|)^{-\frac{d}{2}-\gamma_{\mathcal{R}}}J_{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}(r\|x\|)\Big),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{r^{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}{2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}+1\big)|S^{d-1}|} j_{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}(r\|x\|).$$

Le lemme est démontré. □

Nous sommes désormais en mesure de donner la preuve de l'inégalité du théorème 2.23.

Démonstration. Commençons par prouver qu'il existe une constante C ne dépendant que de κ telle que pour tout x réel non nul, tout y réel et tout r réel strictement positif

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}}. \tag{2.12}$$

Supposons dans un premier temps que $0 < |x| < 2r$. Alors, en utilisant le fait que la translation de Dunkl $\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ est $L^\infty(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$-bornée, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant \|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,\infty} \leqslant 4,$$

et l'inégalité (2.12) s'en déduit aisément.

Supposons maintenant que $|x| \geqslant 2r$. La représentation intégrale

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z)\,\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(z)$$

et la condition de support *2.(a)* du théorème 2.13 impliquent que l'on peut se limiter au cas où $\big||x|-|y|\big| \leqslant r$ car, sinon, l'inégalité (2.12) est évidente puisque $\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y) = 0$. Soit $t > 0$ et soit $q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ la gaussienne généralisée. Comme on a

$$\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}),$$

le caractère $L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$-borné de la translation de Dunkl implique que

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}).$$

De plus, l'inégalité de Hölder et le théorème de Plancherel donnent

$$\big\|\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})\,\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})\big\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,1} \leqslant \big\|\chi_{]-r,r[}\big\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,2}\big\|q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}\big\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,2},$$

inégalité de laquelle on déduit d'une part que

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) = \mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})\,\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}).$$

D'autre part, puisque l'on a par définition

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\big(\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})\big)(\cdot) = E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,\cdot)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})(\cdot),$$

alors $\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\big(\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})\big) \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$. On peut donc affirmer que

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) \in \mathscr{A}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}),$$

et la formule d'inversion permet alors d'écrire

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})(y) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\int_{\mathbb{R}} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iy,z)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)\mathrm{e}^{-tz^2}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z).$$

Notons

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})(y) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\Big(I_1(x,y,r,t) + I_2(x,y,r,t)\Big), \tag{2.13}$$

avec

$$I_1(x,y,r,t) = \int_{|z|\leqslant\frac{1}{r}} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iy,z)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)\mathrm{e}^{-tz^2}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z)$$

$$I_2(x,y,r,t) = \int_{|z|>\frac{1}{r}} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iy,z)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)\mathrm{e}^{-tz^2}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z).$$

Commençons par étudier $I_1(x,y,r,t)$. On a par définition de la transformée de Dunkl

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\int_{-r}^{r} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(-iz,\xi)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\xi),$$

et puisque le noyau de Dunkl est borné par 1 on en déduit facilement que

$$|\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)| \leqslant Cr^{2\kappa+1}.$$

En utilisant à la fois l'inégalité précédente et l'inégalité du lemme 2.24, on obtient

$$|I_1(x,y,r,t)| \leqslant C\int_{|z|\leqslant\frac{1}{r}} \frac{r^{2\kappa+1}}{|x|^\kappa|y|^\kappa|z|^{2\kappa}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z).$$

Puisque

$$\int_{|z|\leqslant\frac{1}{r}} \frac{1}{|z|^{2\kappa}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) = \int_{|z|\leqslant\frac{1}{r}} \mathrm{d}z,$$

on aboutit alors à

$$|I_1(x,y,r,t)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^\kappa|y|^\kappa}.$$

En remarquant l'implication

$$\begin{cases} |x| \geqslant 2r \\ \big||x|-|y|\big| \leqslant r \end{cases} \Longrightarrow\ 2|y| \geqslant |x|,$$

on en déduit finalement l'estimation suivante

$$|I_1(x,y,r,t)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}}. \tag{2.14}$$

Étudions à présent $I_2(x,y,r,t)$. En utilisant le résultat du lemme 2.25, on a

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z) = Cr^{2\kappa+1} j_{\kappa+\frac{1}{2}}(r|z|) = \frac{Cr^\kappa}{|z|^{\kappa+1}}\Big((r|z|)^{\frac{1}{2}} J_{\kappa+\frac{1}{2}}(r|z|)\Big),$$

égalité de laquelle on déduit que

$$|\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)| \leqslant \frac{Cr^\kappa}{|z|^{\kappa+1}},$$

où l'on a utilisé le fait que $\sup_{x\geqslant 0}\big(x^{\frac{1}{2}}|J_\alpha(x)|\big) < +\infty$ tout comme dans la preuve du lemme 2.24. Par conséquent, on peut écrire

$$|I_2(x,y,r,t)| \leqslant C\int_{|z|>\frac{1}{r}} \frac{r^\kappa}{|z|^{\kappa+1}|x|^\kappa|y|^\kappa|z|^{2\kappa}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z).$$

Après intégration et en considérant à nouveau le fait que $2|y| \geqslant |x|$, on aboutit à

$$|I_2(x,y,r,t)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}}. \tag{2.15}$$

En utilisant à la fois (2.14) et (2.15) dans l'égalité (2.13), on obtient

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})(y)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}}. \tag{2.16}$$

Pour montrer (2.12), nous allons bien sûr faire tendre t vers 0 dans l'inégalité (2.16). Observons que par utilisation du théorème de Plancherel on a l'égalité suivante

$$\big\|\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa} - \chi_{]-r,r[}\big\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \big|\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(\xi)\big|^2\big(1-\mathrm{e}^{-t\xi^2}\big)^2\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\xi).$$

On a donc

$$\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa} \to \chi_{]-r,r[}$$

dans $L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$ lorsque $t\to 0$. Puisque $\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ est $L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$-borné on a aussi

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) \to \tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})$$

dans $L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$ lorsque $t\to 0$. En passant à une sous-suite si nécessaire, on peut de ce fait supposer que la convergence se fait presque partout. En passant à la limite lorsque t tend vers 0 dans (2.16), on aboutit à

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}},$$

et la démonstration de l'inégalité (2.12) est terminée.

Venons-en maintenant à la preuve elle-même du théorème.
On peut supposer que $x \neq 0$ car, dans le cas contraire, l'inégalité à démontrer est évidente puisque pour tout y réel

$$\tau_0^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y) = \chi_{]-r,r[}(y).$$

Considérons pour commencer le cas où $|x| \leqslant r$. On a alors

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) = \int_0^{|x|+r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant \int_0^{2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant Cr^{2\kappa+1},$$

c'est-à-dire

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[).$$

Le résultat découle alors du fait que

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant \|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,\infty} \leqslant 4.$$

Considérons maintenant le cas où $|x| > r$. On a dans cette situation

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) = \int_{|x|-r}^{|x|+r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant 2r(|x|+r)^{2\kappa} \leqslant Cr^{2\kappa+1}\left(\frac{|x|^{2\kappa}}{r^{2\kappa}}\right),$$

soit

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)\left(\frac{|x|^{2\kappa}}{r^{2\kappa}}\right).$$

On obtient alors le résultat escompté en utilisant l'inégalité (2.12). Le théorème est entièrement démontré. □

Nous allons pouvoir donner la preuve de l'estimation fondamentale du théorème 2.22. Au préalable, on introduit une notation.

Notation 2.26. Pour x et y réels, on désignera par $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa,+}$ la mesure donnée pour tout $z \in \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa,+}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}K_\kappa(|x|,|y|,|z|)(1-\rho_{x,y,z})\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) & \text{si } x,y \neq 0 \\ \mathrm{d}\delta_x(z) & \text{si } y = 0 \\ \mathrm{d}\delta_y(z) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Signalons que cette mesure est positive. En effet, c'est une simple conséquence de l'observation suivante

$$|z| \in \Big[\big||x|-|y|\big|, |x|+|y|\Big] \Longrightarrow |\rho_{x,y,z}| \leqslant 1.$$

Voici donc la preuve du théorème 2.22.

Démonstration. Écrivons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $y \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B_r}(z) \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j),$$

puis en utilisant le théorème de Fubini (justifié par le point *2.(b)* du théorème 2.13)

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{B_r}(z)\,\mathrm{d}\nu_{x_1,y_1}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_1}(z_1)\right) \bigotimes_{j=2}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j). \tag{2.17}$$

Si x_1 est nul ou si y_1 est nul, on a alors bien évidemment

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{B_r}(z)\, \mathrm{d}\nu_{x_1,y_1}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_1,+}(z_1) \right) \bigotimes_{j=2}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j).$$

Si x_1 et y_1 sont non nuls, l'égalité (2.17) s'écrit

$$\begin{aligned}&\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{B_r}(z) K_{\kappa_1}(|x_1|,|y_1|,|z_1|)\varrho(x_1,y_1,z_1)\, \mathrm{d}\mu_{\kappa_1}^{\mathbb{Z}_2}(z_1) \right) \bigotimes_{j=2}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Or les fonctions

$$z_1 \mapsto \rho_{z_1,x_1,y_1} \quad \text{et} \quad z_1 \mapsto \rho_{z_1,y_1,x_1}$$

sont impaires. Mais puisque la fonction $z_1 \mapsto \chi_{B_r}(z)$ est paire, l'égalité (2.18) s'écrit

$$\begin{aligned}&\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\chi_{B_r}(z) K_{\kappa}(|x_1|,|y_1|,|z_1|)(1-\rho_{x_1,y_1,z_1})\, \mathrm{d}\mu_{\kappa_1}^{\mathbb{Z}_2}(z_1) \right) \bigotimes_{j=2}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{B_r}(z)\, \mathrm{d}\nu_{x_1,y_1}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_1,+}(z_1) \right) \bigotimes_{j=2}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j).$$

En utilisant de manière répétée le théorème de Fubini (justifié à chaque fois par le point *2.(b)* du théorème 2.13) et l'argument décrit ci-dessus, on aboutit à

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B_r}(z) \bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j).$$

Puisque la mesure est positive, on peut désormais affirmer que

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{Q_r}(z) \bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j),$$

où l'on désigne par Q_r le cube suivant $Q_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |x_j| < r,\ 1 \leqslant j \leqslant d \right\}$. Les variables étant séparées, on en déduit que

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\, \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j).$$

Or, pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$, on a par parité de $z_j \mapsto \chi_{]-r,r[}(z_j)$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\, \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\, \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j),$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\,\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j) = \tau_{x_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_j).$$

Finalement, on a donc

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \prod_{j=1}^{d} \tau_{x_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_j). \tag{2.19}$$

On obtient le résultat escompté en utilisant le théorème 2.23 dans l'inégalité (2.19). □

Nous avons présenté dans les sections précédentes l'opérateur maximal de Dunkl et le cadre de travail. Nous pouvons à présent en venir au résultat fondamental de ce chapitre, à savoir les inégalités de Fefferman-Stein pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$.

2.3 Inégalités de Fefferman-Stein pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$

2.3.1 Énoncé et discussion du résultat

Commençons par énoncer les inégalités que nous souhaitons prouver. On dira indifféremment inégalités de Fefferman-Stein ou théorème maximal vectoriel pour désigner le résultat suivant, qui constitue une extension du théorème maximal de Thangavelu et Xu (théorème 2.2) dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$.

Théorème 2.27. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{C}{\lambda}\left\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

   où $C = C(d,\kappa,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors on a*

$$\left\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C\left\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

   où $C = C(d,\kappa,p,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Dans le cas où l'on remplace $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$ par l'opérateur de Hardy-Littlewood et $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ par les espaces L^p classiques, on retrouve les inégalités prouvées par Fefferman et Stein au début des années soixante-dix ([24]), ces inégalités constituant une extension du théorème de Hardy-Littlewood au cas des fonctions à valeurs ℓ^r. Leur preuve repose essentiellement sur trois puissants arguments d'analyse réelle, à savoir un théorème maximal et une inégalité à poids pour l'opérateur maximal et une décomposition de Calderón-Zygmund.
Comme nous l'avons dit dans le préambule au chapitre 2, un théorème analogue pour M_κ^W semble, du fait du manque d'informations sur la translation de Dunkl, hors de portée à l'heure actuelle. Même dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$, cet opérateur de translation, bien que $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$-borné, ne permet pas la mise en œuvre pour l'opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$

des trois ingrédients cités plus haut. Notre stratégie pour parvenir à démontrer le théorème 2.27 consiste donc à construire un opérateur de type Hardy-Littlewood qui contrôle ponctuellement $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$ et pour lequel on pourra utiliser les techniques classiques d'analyse réelle. Pour construire un tel opérateur, il va falloir nous débarrasser finement de la translation de Dunkl. Dans cette optique, l'estimation du théorème 2.22 va jouer un rôle essentiel.

Avant de donner la preuve du théorème maximal vectoriel, discutons du cas où $r = +\infty$ et du cas où $p = +\infty$.

Le cas $r = +\infty$ Le théorème 2.27 reste vrai dans le cas où $r = +\infty$, et il est même vrai pour un groupe de réflexions quelconque. En effet, ce cas est une simple conséquence du théorème maximal pour M_κ^W (théorème 2.2) puisque

$$\sup_{n\geqslant 1} M_\kappa^W f_n \leqslant M_\kappa^W(\sup_{n\geqslant 1}|f_n|).$$

Le cas $p = +\infty$ Le théorème 2.27 est faux dans le cas où $p = +\infty$. Donnons un contre-exemple dans le cas de la dimension un. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions où, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n = \chi_{[2^{n-1},2^n[}$. On a

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |\chi_{[2^{n-1},2^n[}|^r\Big)^{\frac{1}{r}} = \chi_{[1,+\infty[} \in L^\infty$$

alors que l'on va montrer que

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \notin L^\infty. \tag{2.20}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a, par définition de $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}$, l'inégalité suivante

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x) \geqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-|x|-2^n,|x|+2^n[)}\int_{2^{n-1}}^{2^n} \tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(y).$$

Or, on affirme que pour $y \in [2^{n-1}, 2^n[$

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y) = 1. \tag{2.21}$$

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&2^{2-2\kappa}\mathscr{B}\Big(\kappa,\frac{1}{2}\Big)\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y)\\
&\quad= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[}(z)\chi_{]||x|-|y||,|x|+|y|[}(|z|)\frac{\Delta(|x|,|y|,|z|)^{2\kappa-2}}{(|xyz|)^{2\kappa-1}}\varrho(x,-y,z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z),
\end{aligned}$$

et, puisque $|x| + |y| < |x| + 2^n$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&2^{2-2\kappa}\mathscr{B}\Big(\kappa,\frac{1}{2}\Big)\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y)\\
&\qquad\qquad= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]||x|-|y||,|x|+|y|[}(|z|)\frac{\Delta(|x|,|y|,|z|)^{2\kappa-2}}{(|xyz|)^{2\kappa-1}}\varrho(x,-y,z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y) = \nu_{x,-y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\mathbb{R}).$$

On obtient (2.21) en utilisant le point *2.(b)* du théorème 2.13. Par conséquent on a l'inégalité

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x) \geqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-|x|-2^n,|x|+2^n[)}\int_{2^{n-1}}^{2^n} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(y),$$

soit après calcul

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x) \geqslant \frac{2^{n(2\kappa+1)}-2^{(n-1)(2\kappa+1)}}{2(|x|+2^n)^{2\kappa+1}}.$$

Pour x vérifiant $|x| \leqslant 2^n$ on aboutit à l'inégalité

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x) \geqslant \frac{2^{n(2\kappa+1)}-2^{(n-1)(2\kappa+1)}}{2^{(n+1)(2\kappa+1)+1}},$$

et après simplification

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x) \geqslant \frac{1-2^{-(2\kappa+1)}}{2^{2\kappa+2}}.$$

On peut donc écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x)|^r \geqslant \sum_{\{n:2^n\geqslant|x|\}} \Big(\frac{1-2^{-(2\kappa+1)}}{2^{2\kappa+2}}\Big)^r = +\infty,$$

ce qui achève la preuve de (2.20) et fournit bien un contre-exemple au théorème 2.27 dans le cas où $p = +\infty$. Signalons tout de même que nous donnerons dans le chapitre 3 un résultat d'intégrabilité locale dans le cas où $p = +\infty$.

2.3.2 Preuve du théorème maximal vectoriel

Nous allons prouver dans cette sous-section le théorème 2.27. Comme nous l'avons déjà annoncé, notre but consiste à contrôler ponctuellement l'opérateur maximal de Dunkl associé à $\mathbb{Z}_2^d$ par un opérateur de type Hardy-Littlewood qui va vérifier un théorème maximal vectoriel que l'on pourra démontrer classiquement. Pour construire un tel opérateur, et puisque c'est la translation de Dunkl qui pose problème, nous cherchons à nous en débarrasser. Le théorème 2.22 va jouer un rôle essentiel et justifie la définition qui va suivre. On introduit au préalable des notations.

Notation 2.28. Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on notera $\tilde{x}$ le vecteur des valeurs absolues des coordonnées de x, c'est-à-dire $\tilde{x} = \big(|x_1|, \dots, |x_d|\big)$.
Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on notera $R(x, d)$ le pavé suivant

$$R(x, r) = I(x_1, r) \times \cdots \times I(x_d, r),$$

où l'on rappelle que pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$

$$I(x_j, r) =]\max\{0; |x_j| - r\}, |x_j| + r[.$$

Définition 2.29. Soit $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ l'opérateur maximal à poids défini par

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Signalons que cet opérateur est invariant sous l'action du groupe de réflexions $\mathbb{Z}_2^d$, c'est-à-dire que l'on a, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \in \mathbb{Z}_2^d$

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}(f \circ \varepsilon)(x) = M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) = M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(\varepsilon x), \tag{2.22}$$

où l'on note $f \circ \varepsilon$ la fonction $x \mapsto f(\varepsilon x)$, avec

$$\varepsilon x = (\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_d x_d).$$

Cette propriété évidente va s'avérer très utile dans la suite. Nous allons maintenant montrer que cet opérateur contrôle ponctuellement $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$.

Proposition 2.30. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a l'inégalité de contrôle suivante*

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x), \tag{2.23}$$

où $C = C(d, \kappa)$ est indépendante de f et de x.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit $r > 0$. Dans la preuve du théorème 2.22, on a montré l'inégalité (2.19), à savoir pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \prod_{j=1}^d \tau_{x_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_j).$$

Or, le point *2.(a)* du théorème 2.13 nous permet d'affirmer que

$$|y_j| \notin I(x_j, r) \Longrightarrow \tau_{x_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_j) = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = 0 \ \text{ si } \ \tilde{y} \notin R(x, r).$$

Cette condition de support et le résultat du théorème 2.22 impliquent que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \right| \leqslant C \int_{\{y : \tilde{y} \in R(x,r)\}} |f(y)| \prod_{j=1}^d \frac{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)}{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(I(x_j,r))} \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Puisque l'on a bien évidemment

$$\prod_{j=1}^d \mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[) = \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_r), \quad \prod_{j=1}^d \mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}\big(I(x_j,r)\big) = \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r)),$$

on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \right| \leqslant \frac{C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_r)}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y : \tilde{y} \in R(x,r)\}} |f(y)| \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y). \tag{2.24}$$

Remarquons que l'on a $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_r) = C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(B_r)$ avec

$$C = \frac{2^d(d + 2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d})}{\prod_{j=1}^d (2\kappa_j + 1) a(h_{\mathbb{Z}_2^d}, S^{d-1})}.$$

En effet, on a d'une part

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_r) = \prod_{j=1}^{d} \mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[) = 2^d \prod_{j=1}^{d} \Big(\frac{1}{2\kappa_j+1}\Big) r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}},$$

et d'autre part, un passage en coordonnées polaires nous donne

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(B_r) = \int_0^r u^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}-1}\,\mathrm{d}u \int_{S^{d-1}} h^2_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(x)\,\mathrm{d}\omega(x) = \frac{a(h_{\mathbb{Z}_2^d}, S^{d-1})}{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}} r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}.$$

On peut donc déduire de (2.24) que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(B_r)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(-y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \right| \leqslant \frac{C}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),$$

et le résultat attendu découle trivialement de cette inégalité. □

Grâce à ce résultat, il nous suffit d'établir le théorème suivant afin de démontrer le théorème 2.27.

Théorème 2.31. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{C}{\lambda} \left\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

où $C = C(d,\kappa,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors on a*

$$\left\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C \left\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

où $C = C(d,\kappa,p,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour prouver ce théorème, nous allons suivre la stratégie introduite par Fefferman et Stein dans un cadre classique ([24]). À cet effet, nous allons notamment prouver que l'opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ satisfait un théorème maximal et une inégalité à poids. Commençons donc par établir le théorème maximal. Dans cette optique, et puisque $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ se prête aux techniques de recouvrement, nous allons avoir besoin d'un lemme de type Vitali que nous énonçons immédiatement (une version de ce lemme dans le cas unidimensionnel peut être trouvée dans [8] ou [1]).

Lemme 2.32. *Soit X un sous-ensemble mesurable (pour la mesure $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$) de $\mathbb{R}_+^* \times \cdots \times \mathbb{R}_+^*$ (d fois). Supposons qu'il existe une famille $\{R_j\}_{j\in J}$ (avec pour tout $j \in J, R_j = R(z^j, r_j)$) vérifiant*

$$\sup_{j\in J}(\mathrm{diam} R_j) < +\infty$$

et telle que

$$X \subset \bigcup_{j\in J} R_j.$$

Alors, il existe une sous-famille disjointe (qui peut être finie) $R_1, \ldots, R_n, \ldots$, telle que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X) \leqslant C \sum_n \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R_n),$$

où $C = C(d, \kappa)$ est indépendante de la famille $\{R_j\}$.

Démonstration. En procédant de manière standard (voir par exemple [49, page 9]), il est facile de construire des ensembles disjoints $R(z^1, r_1) = R_1, \ldots, R(z^n, r_n) = R_n, \ldots$, qui sont tels que

$$X \subset \bigcup_n R(z^n, 5r_n).$$

Le lemme s'en déduit alors si l'on montre que la mesure $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$ est, de manière générale, doublante pour les ensembles $R(x, r)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C < +\infty$ telle que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x, 2r)) \leqslant C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x, r)).$$

En fait, comme on a d'une part

$$\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) = \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(x_j),$$

et d'autre part

$$R(x, r) = I(x_1, r) \times \cdots \times I(x_d, r),$$

il nous suffit même de montrer que la mesure unidimensionnelle $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}$ est doublante pour un intervalle du type $I(x, r)$. Prouvons donc ce seul point.

Supposons dans un premier temps que $|x| \leqslant r$. Dans ce cas,

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) = \int_0^{|x|+2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant (|x| + 2r)^{2\kappa+1}.$$

Par conséquent

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) \leqslant 2^{2\kappa+1}(|x| + r)^{2\kappa+1},$$

d'où

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) \leqslant C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, r)).$$

Supposons maintenant que $r \leqslant |x| \leqslant 2r$. On écrit

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) = \int_0^{|x|+2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant C r^{2\kappa+1},$$

et on écrit

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, r)) = \int_{|x|-r}^{|x|+r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \geqslant \int_r^{2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \geqslant r^{2\kappa+1}.$$

D'où

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) \leqslant C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, r)).$$

Supposons pour finir que $|x| \geqslant 2r$. Dans ce cas, on a d'une part

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,2r)) = \int_{|x|-2r}^{|x|+2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant 4r(|x|+2r)^{2\kappa},$$

et d'autre part

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) = \int_{|x|-r}^{|x|+r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \geqslant 2r(|x|-r)^{2\kappa}.$$

Puisque $|x| + 2r \leqslant 4(|x|-r)$, on en déduit que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,2r)) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)).$$

On a donc bien prouvé le caractère doublant de $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}$ pour les $I(x,r)$, et on peut de ce fait considérer que le lemme est entièrement démontré. □

Grâce à ce lemme, nous allons pouvoir montrer classiquement (c'est-à-dire par une méthode combinant un argument d'interpolation et un argument de recouvrement) un théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$.

Théorème 2.33. *Soit f une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Si $f \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

   où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f et de λ.

2. *Si $f \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, $1 < p \leqslant +\infty$, alors $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ et on a*

$$\big\|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f\big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

   où $C = C(d,\kappa,p)$ est une constante indépendante de f.

Démonstration. Le cas $p = +\infty$ étant une évidence, il nous suffit, grâce au théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (voir par exemple [49, page 21]), de prouver la première assertion du théorème.
On introduit pour tout $\lambda > 0$ l'ensemble suivant

$$X_\lambda^+ = \Big\{x \in \mathbb{R}_+^* \times \cdots \times \mathbb{R}_+^* : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}.$$

Soit $x \in X_\lambda^+$. Par définition de la fonction $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f$, il existe $r_x > 0$ tel que

$$\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r_x)\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) > \lambda\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r_x)),$$

ce qui implique que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r_x)) < \frac{1}{\lambda}\,\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d\kappa,1}.$$

Puisque $X_\lambda^+ \subset \cup_{x\in X_\lambda^+} R(x,r_x)$, on déduit en utilisant le lemme 2.32 l'existence d'une suite (finie ou non) d'ensembles disjoints $R(x^1,r_{x_1}) = R_1,\ldots,R(x^n,r_{x_n}) = R_n,\ldots$, telle que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+) \leqslant C\sum_n \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R_n),$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de la famille $\{R(x,r_x)\}$. Or, chaque R_n vérifie

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R_n) < \frac{1}{\lambda}\int_{\{y:\tilde{y}\in R_n\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Par conséquent

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+) \leqslant \frac{C}{\lambda}\sum_n \int_{\{y:\tilde{y}\in R_n\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

En utilisant le caractère disjoint de la suite, on aboutit à

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\{y:\tilde{y}\in \cup_n R_n\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.25}$$

Notons maintenant pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \in \mathbb{Z}_2^d$

$$\varepsilon X_\lambda^+ = \left\{x \in \varepsilon_1\mathbb{R}_+^* \times \cdots \times \varepsilon_d\mathbb{R}_+^* : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\right\},$$

où pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$

$$\varepsilon_j\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^* \text{ si } \varepsilon_j = 1, \quad \varepsilon_j\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_-^* \text{ si } \varepsilon_j = -1.$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^d$ on a donc en utilisant (2.22)

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+) = \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\varepsilon X_\lambda^+).$$

Finalement, on peut écrire

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\right\}\right) \leqslant \sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\varepsilon X_\lambda^+) \leqslant 2^d \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+),$$

ce qui implique en utilisant (2.25)

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

Remarque 2.34. Notons au passage que ce théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ et l'inégalité de contrôle (2.23) impliquent le théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$. Cela constitue donc une preuve différente (dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$) de celle donnée par Thangavelu et Xu (théorème 2.2).

Démontrons maintenant une inégalité à poids pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$. Dans la preuve des inégalités de Fefferman-Stein, ce résultat va jouer le rôle d'un argument de dualité.

Théorème 2.35. *Soit g une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$ que l'on suppose positive et localement intégrable (au sens de $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$). Pour tout r vérifiant $1 < r < +\infty$, on a l'inégalité à poids suivante*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(y)\right)^r g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^r M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),$$

où $C = C(d,\kappa,r)$ est indépendante de f et de g.

Démonstration. Grâce au théorème d'interpolation de Marcinkiewicz et au caractère L^∞-borné de $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$, il nous suffit pour prouver le théorème de démontrer que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $\lambda > 0$

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y), \tag{2.26}$$

où $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(X) = \int_X g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)$ et où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f, de g et de λ. En fait, en notant pour tout $\lambda > 0$

$$X_\lambda^+ = \Big\{x \in \mathbb{R}_+^* \times \cdots \times \mathbb{R}_+^* : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\},$$

il nous suffit même de montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(X_\lambda^+) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y), \tag{2.27}$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f, de g et de λ.
Supposons en effet que l'inégalité (2.27) est démontrée. On a alors

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(\varepsilon X_\lambda^+) = \sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g\circ\varepsilon}(X_\lambda^+).$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité (2.27) on obtient

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}(g\circ\varepsilon)(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

En invoquant le fait que $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}(g\circ\varepsilon) = M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g$, on aboutit à (2.26), inégalité dont découle comme on l'a dit le théorème. Il nous reste donc à prouver (2.27).

Soit K un sous-ensemble compact de X_λ^+. Comme pour la preuve du théorème 2.33, on peut affirmer qu'il existe $R(x^1,r_1),\ldots,R(x^n,r_n),\ldots$, deux à deux disjoints, tels que $X_\lambda^+ \subset \cup_n R(x^n,5r_n)$ et tels que chaque $R(x^n,r_n)$ vérifie

$$\lambda\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x^n,r_n)) < \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^n,r_n)\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y). \tag{2.28}$$

On peut donc recouvrir K par un nombre fini de tels $R(x^n,r_n)$, disons $K \subset \cup_{k=1}^N R(x^k,5r_k)$. Soit alors $1 \leqslant k \leqslant N$ et soit y tel que $\tilde{y} \in R(x^k,r_k)$. Par définition de $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g$, on peut écrire

$$\int_{\{z:\tilde{z}\in R(y,6r_k)\}} g(z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z) \leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(y,6r_k)) M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y). \tag{2.29}$$

Or, on a d'une part

$$R(x^k,5r_k) \subset R(y,6r_k),$$

et d'autre part

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(y,6r_k)) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x^k,r_k)),$$

puisque $R(y,6r_k) \subset R(x^k,7r_k)$. Par conséquent, on peut déduire de l'inégalité (2.29) que

$$\int_{\{z:\tilde{z}\in R(x^k,5r_k)\}} g(z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x^k,r_k)) M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y).$$

En multipliant par $|f(y)|$ et en intégrant sur $\{y : \tilde{y} \in R(x^k, r_k)\}$, on obtient

$$\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^k,r_k)\}} |f(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \int_{\{z:\tilde{z}\in R(x^k,5r_k)\}} g(z)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z)$$
$$\leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x^k, r_k)) \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^k,r_k)\}} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} g(y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),$$

ce qui permet d'affirmer après utilisation de (2.28) et après simplification que

$$\int_{\{z:\tilde{z}\in R(x^k,5r_k)\}} g(z)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^k,r_k)\}} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} g(y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Puisque

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, g}(K) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, g}(R(x^k, 5r_k)) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{\{z:\tilde{z}\in R(x^k,5r_k)\}} g(z)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z),$$

on aboutit à

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, g}(K) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{C}{\lambda} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^k,r_k)\}} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} g(y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

En utilisant le caractère disjoint des $R(x^k, r_k)$, on peut affirmer que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, g}(K) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_{\{y:\tilde{y}\in \cup_{k=1}^N R(x^k,r_k)\}} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} g(y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),$$

puis que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, g}(K) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_{y\in\mathbb{R}^d} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} g(y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout compact $K \subset X_\lambda^+$, on en déduit (2.27), et le théorème est démontré. $\square$

On donne maintenant la décomposition de Calderón-Zygmund qui va nous servir par la suite (voir [51, page 17]).

Théorème 2.36. *Soit g une fonction appartenant à $L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ et soit λ un réel strictement positif. Alors, il existe une suite $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ de cubes bornés dont les intérieurs sont deux à deux disjoints et telle que*

$$\sum_{j\geqslant 1} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j) \leqslant \frac{C}{\lambda} \|g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

$$|g(x)| \leqslant \lambda \ \textit{si}\ x \notin \Omega = \bigcup_{j\geqslant 1} Q_j,$$

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)} \int_{Q_j} |g(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant C\lambda \ \ \textit{pour chaque}\ Q_j,$$

avec $C = C(d, \kappa)$ une constante indépendante de f, de λ et de la suite $(Q_j)_{j\geqslant 1}$.

Nous venons donc de présenter les trois arguments essentiels qui vont servir dans la preuve des inégalités de Fefferman-Stein. Avant d'en venir à la preuve elle-même, on prouve un dernier point technique afin de ne pas alourdir la démonstration du théorème 2.31.

Lemme 2.37. *Soit* $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ *une famille de cubes bornés dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, et soit*

$$\Omega = \bigcup_{j\geqslant 1} Q_j, \quad \widetilde{\Omega} = \bigcup_{j\geqslant 1} \widetilde{Q_j},$$

où $\widetilde{Q_j}$ *désigne le cube concentrique avec* Q_j *mais ayant pour diamètre le double de celui de* Q_j*.*
Soit f *une fonction mesurable définie sur* $\mathbb{R}^d$ *et soit* $\overline{f}$ *la fonction donnée par*

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin \Omega \\ \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)} \int_{Q_j} |f(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) & si\ x \in Q_j \end{cases}.$$

Alors, on a l'inégalité suivante

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\big(f\chi_\Omega\big)(x) \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f}(x), \quad x \in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon\widetilde{\Omega},$$

où $C = C(d,\kappa)$ *est une constante indépendante de* f *et de* Ω*.*

Démonstration. Soit $x \in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon\widetilde{\Omega}$. Pour tout $r > 0$ on a

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |(f\chi_\Omega)(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) = \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}\cap\Omega} |f(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Alors, en posant

$$J = \Big\{ j \geqslant 1 : Q_j \cap \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon R(x,r) \neq \emptyset \Big\},$$

il s'ensuit que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |(f\chi_\Omega)(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \sum_{j\in J} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}\cap Q_j} |f(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

On étend le domaine d'intégration pour obtenir

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |(f\chi_\Omega)(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \sum_{j\in J} \int_{Q_j} |f(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

L'égalité suivante

$$\int_{Q_j} |\overline{f}(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) = \int_{Q_j} |f(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)$$

implique que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |(f\chi_\Omega)(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \sum_{j\in J} \int_{Q_j} |\overline{f}(y)| \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Comme $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite de cubes dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, on peut écrire

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\leqslant\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\cup_{j\in J}Q_j}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Puisque

$$\begin{cases} x\in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon\Omega \\ Q_j\cap\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon R(x,r)\neq\emptyset\end{cases}\Longrightarrow Q_j\subset\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon R(x,3r),$$

nous avons donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}&\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\\ &\leqslant\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon R(x,3r)}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\leqslant\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,3r)\}}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

En utilisant l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}&\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,3r)\}}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\\ &=\frac{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,3r))}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,3r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,3r)\}}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),\end{aligned}$$

on aboutit à

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}&\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\\ &\leqslant C\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,3r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,3r)\}}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\leqslant CM_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f}(x).$$

Finalement, on en déduit que

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\big(f\chi_\Omega\big)(x)\leqslant CM_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f}(x),$$

ce qui est l'inégalité recherchée. □

Nous avons maintenant à disposition tous les outils requis pour prouver le théorème 2.31, qui implique, comme on l'a déjà expliqué, le théorème 2.27 grâce à l'inégalité de contrôle (2.23).

Démonstration. On commence par prouver le second point dans le cas où $p = r$.
Puisque l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(x)|^r\Big)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(x)|^r\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

on obtient en utilisant le théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ (théorème 2.33)

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(x)|^r\Big)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)\leqslant C\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|f_n(x)|^r\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x).$$

Après interversion on aboutit à

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(x)|^r\Big)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x)|^r\Big)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

c'est-à-dire

$$\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r, \tag{2.30}$$

ce qui est le résultat voulu dans le cas où $p = r$.

Grâce au théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, le cas $1 < p < r$ est une simple conséquence de (2.30) et du premier point du théorème que nous allons maintenant démontrer.

Appliquons une décomposition de Calderón-Zygmund (théorème 2.36) à la fonction

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

On obtient une suite $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ de cubes bornés dont les intérieurs sont deux à deux disjoints et telle que

$$\sum_{j\geqslant 1}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)\leqslant\frac{C}{\lambda}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}, \tag{2.31}$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\leqslant\lambda\quad\text{si } x\notin\Omega=\bigcup_{j\geqslant 1}Q_j, \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)}\int_{Q_j}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(y)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\leqslant C\lambda\quad\text{pour chaque } Q_j, \tag{2.33}$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(Q_j)_{j\geqslant 1}$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on décompose f_n comme suit

$$f_n = f_n' + f_n'',$$

avec

$$f_n' = f_n\,\chi_{{}^c\Omega} \quad \text{et} \quad f_n'' = f_n\,\chi_\Omega.$$

Puisque l'on a évidemment

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} + \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n''(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}},$$

il nous suffit pour démontrer le premier point du théorème de prouver les deux inégalités suivantes

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n'(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}, \tag{2.34}$$

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n''(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.35}$$

On commence par prouver (2.34). Appliquons l'inégalité de Chebyshev afin d'obtenir

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n'(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda^r}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r.$$

En utilisant l'inégalité (2.30), on en déduit que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n'(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda^r}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r. \tag{2.36}$$

Or, on a d'une part

$$\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r \leqslant \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{r-1}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

et puisque (2.32) implique d'autre part que

$$\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{r-1} \leqslant \lambda^{r-1},$$

on peut déduire de (2.36) l'inégalité

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n'(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

et (2.34) est prouvé.

Nous allons maintenant prouver (2.35). Considérons pour tout $n \geqslant 1$ la fonction $\overline{f_n}$ définie par

$$\overline{f_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Omega \\ \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)} \int_{Q_j} |f_n(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) & \text{si } \ x \in Q_j, \end{cases}$$

et soit $\widetilde{Q_j}$ le dilaté de Q_j comme dans le lemme 2.37. Remarquons que la fonction $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\overline{f_n}(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}$ est majorée par $C\lambda$.
En effet, c'est évident si $x \notin \Omega$ et si $x \in Q_j$, alors

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |\overline{f_n}(x)|^{\,r}\Big)^{\frac{1}{r}} &= \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)}\int_{Q_j}|f_n(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\Big]^r\Big)^{\frac{1}{r}}\\ &\leqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)}\int_{Q_j}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(y)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),\end{aligned}$$

où l'on a appliqué l'inégalité de Minkowski. En utilisant (2.33), on obtient bien

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant C\lambda.$$

Par conséquent, nous avons

$$\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|\overline{f_n}(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|^r_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r} \leqslant C\lambda^r\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\Omega) \leqslant C\lambda^r\sum_{j\geqslant 1}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j),$$

où l'on a également utilisé le fait que $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\overline{f_n}(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}$ est à support contenu dans Ω. En appliquant (2.31), on aboutit à

$$\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|\overline{f_n}(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|^r_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r} \leqslant C\lambda^{r-1}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}.$$

En utilisant successivement l'inégalité de Chebyshev, l'inégalité (2.30) et le dernier résultat ci-dessus, il s'ensuit que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.37}$$

Puisque nous avons

$$\begin{aligned}&\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f''_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big)\\ &\qquad\leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon\widetilde{\Omega}\Big) + \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon\widetilde{\Omega} : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f''_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big),\end{aligned}$$

on obtient en appliquant le lemme 2.37

$$\begin{aligned}&\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f''_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big)\\ &\leqslant 2^d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\widetilde{\Omega}) + \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon\widetilde{\Omega} : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{C}\Big\}\Big).\end{aligned} \tag{2.38}$$

D'une part, on a
$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\widetilde{\Omega}) \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\widetilde{Q_j}) \leqslant C \sum_{j\geqslant 1} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j),$$

et donc en utilisant (2.31)
$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\widetilde{\Omega}) \leqslant \frac{C}{\lambda} \Big\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.39}$$

D'autre part
$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon\widetilde{\Omega} : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{C}\Big\}\Big)$$
$$\leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{C}\Big\}\Big),$$

d'où, grâce à (2.37), on en déduit que
$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon\widetilde{\Omega} : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{C}\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda} \Big\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.40}$$

Alors, en utilisant (2.39) et (2.40), on peut déduire de (2.38) que
$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n''(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda} \Big\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

et la preuve de (2.35) est terminée.

Afin de démontrer le théorème dans son intégralité, il nous reste à prouver le second point dans le cas où $p > r$.
Soit g une fonction mesurable positive satisfaisant
$$\|g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\frac{p}{p-r}} = 1.$$

On a
$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r\Big) g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

et on obtient en utilisant l'inégalité à poids du théorème 2.35
$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r\Big) g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|^r M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

et après interversion
$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r\Big) g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|^r\Big) M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x).$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on aboutit à

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(x)|^r\Big)g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)$$
$$\leqslant C\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x)|^r\Big)^{\frac{p}{r}}\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)\bigg)^{\frac{r}{p}}\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big(M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}g(x)\big)^{\frac{p}{p-r}}\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)\bigg)^{\frac{p-r}{p}},$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(x)|^r\Big)g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)\leqslant C\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}^r\big\|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}g\big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\frac{p}{p-r}}.$$

En appliquant le théorème maximal pour l'opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ (théorème 2.33), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(x)|^r\Big)g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)\leqslant C\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}^r\|g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\frac{p}{p-r}},$$

et, puisque $\|g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\frac{p}{p-r}}=1$,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(x)|^r\Big)g(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)\leqslant C\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}^r.$$

De ce fait, on peut conclure que

$$\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}\leqslant C\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

et le théorème est entièrement prouvé. □

Les inégalités de Fefferman-Stein constituant un résultat fondamental en analyse harmonique, il est intéressant de pouvoir étendre ce résultat à une plus large classe d'opérateurs. C'est ce que nous allons faire maintenant dans une nouvelle section.

2.4 Extension du résultat à une plus large classe d'opérateurs

On cherche à définir une classe à laquelle va appartenir la fonction maximale associée au semi-groupe de la chaleur de type Dunkl et la fonction maximale associée au semi-groupe de Poisson de type Dunkl.

Définition 2.38. Soit $\phi\in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ une fonction radiale, plus précisément $\phi(x)=\psi(\|x\|)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$. On suppose que ψ est différentiable et qu'elle satisfait les conditions suivantes

$$\lim_{r\to+\infty}\psi(r)=0,\qquad\int_0^{+\infty}r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\psi(r)\Big|\,\mathrm{d}r<+\infty.$$

On note alors $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}$ l'opérateur suivant

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}f(x)=\sup_{t>0}\big|(f\underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*}\phi_t)(x)\big|,\quad x\in\mathbb{R}^d,$$

où ϕ_t désigne pour tout $t > 0$ la dilatée de ϕ donnée par

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}}\,\phi\Big(\frac{x}{t}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Présentons tout de suite deux exemples important de telles fonctions.

Semi-groupe de la chaleur de type Dunkl Notre premier exemple concerne la gaussienne généralisée $q_t^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}$. Posons

$$\phi(x) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

alors pour tout $t > 0$ on a

$$\phi_{\sqrt{2t}}(x) = \frac{c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}}{(2t)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} = q_t^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(x).$$

Dans ce cas, $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}$ est l'opérateur maximal associé au semi-groupe de la chaleur de type Dunkl.

Semi-groupe de Poisson de type Dunkl Notre second exemple concerne le noyau de Poisson généralisé (ou de type Dunkl). Si ϕ est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$\phi(x) = \frac{a_\kappa}{(1+\|x\|^2)^{\frac{d+1}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}},$$

où a_κ est la constante

$$a_\kappa = \frac{c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\, 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}\,\Gamma\big(\frac{d+1}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}\big)}{\sqrt{\pi}},$$

alors pour tout $t > 0$ on a

$$\phi_t(x) = \frac{a_\kappa\, t}{(t^2+\|x\|^2)^{\frac{d+1}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}} = P_t^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(x),$$

où, de manière plus générale, $P_t^{W,\kappa}$ est l'opérateur de Poisson de type Dunkl (pour plus de précisions, nous renvoyons à [45] et [56]). Par conséquent, $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}$ est dans ce cas l'opérateur maximal associé au semi-groupe de Poisson de type Dunkl.

On énonce maintenant le résultat concernant l'opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}$ (pour ϕ, ψ ϕ_t comme dans la définition 2.38).

Théorème 2.39. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi} f_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

où $C = C(d,\kappa,r,\phi)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. Soit $1 < r < +\infty$ *et soit* $1 < p < +\infty$*. Si* $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$*, alors on a*

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi} f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C\left\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

où $C = C(d,\kappa,p,r,\phi)$ *est indépendante de* $(f_n)_{n\geqslant 1}$*.*

Démonstration. La preuve ne présente pas de difficulté particulière. En effet, en s'appuyant sur la démonstration du théorème 7.5 de [56], on sait que pour une telle fonction ϕ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi)(x)\right| \leqslant CM_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \int_0^{+\infty} r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\psi(r)\right| \mathrm{d}r,$$

où $C = C(d,\kappa)$. De ce fait, pour tout $t > 0$ on obtient

$$\left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi_t)(x)\right| \leqslant CM_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \int_0^{+\infty} r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\psi_t(r)\right| \mathrm{d}r,$$

avec C indépendante de t. De l'égalité évidente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\psi_t(r) = \frac{1}{t^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\psi\left(\frac{r}{t}\right),$$

on peut donc déduire que

$$\left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi_t)(x)\right| \leqslant CM_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \int_0^{+\infty} \frac{r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}}{t^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+1}} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\psi\left(\frac{r}{t}\right)\right| \mathrm{d}r.$$

Un changement de variables nous donne

$$\left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi_t)(x)\right| \leqslant CM_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \int_0^{+\infty} r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\psi(r)\right| \mathrm{d}r,$$

et on aboutit finalement à

$$\sup_{t>0}\left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi_t)(x)\right| \leqslant CM_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x),$$

où $C = C(d,\kappa,\phi)$ est indépendante de f. Cette estimation ponctuelle et l'utilisation du théorème 2.27 permettent d'obtenir le résultat. $\square$

Chapitre 3

Intégrabilité exponentielle et hypergroupes de Bessel-Kingman

Nous allons présenter dans ce chapitre deux résultats qui sont liés au théorème maximal vectoriel (théorème 2.27) que l'on a prouvé précédemment.
Le premier concerne un résultat d'intégrabilité locale qui permet de compléter les inégalités de Fefferman-Stein dans le cas où $p = +\infty$. Plus précisément, nous montrerons sous certaines hypothèses que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(\cdot)|^r$ est exponentiellement intégrable sur tout compact. Ce résultat, qui est intimement lié au comportement des constantes du théorème 2.27 lorsque p est grand, peut être une première motivation pour introduire des espaces d'Orlicz dans le cadre de l'analyse de Dunkl.
Le second résultat quant à lui consistera à établir des inégalités de Fefferman-Stein pour des hypergroupes unidimensionnels de Bessel-Kingman. Après avoir défini de manière succincte la notion d'hypergroupe, on introduira la classe particulière des hypergroupes de Bessel-Kingman (en présentant la classe plus large à laquelle ils appartiennent, à savoir celle de Chébli-Trimèche). On définira dans ce contexte un opérateur maximal non centré et on montrera comment la preuve que l'on a donnée du théorème 2.27 peut être adaptée sans difficulté dans ce cadre.

3.1 Intégrabilité exponentielle

On commence par écrire le principal résultat de la section, à savoir un résultat d'intégrabilité exponentielle locale qui complète l'énoncé du théorème maximal vectoriel pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$. Dans le cas de l'opérateur maximal usuel, ce résultat est dû à Fefferman et Stein ([24] ou [51, page 75]).

Théorème 3.1. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$. Soit $1 < r < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^\infty(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ est telle que*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\operatorname{supp}\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right) < +\infty,$$

alors la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(\cdot)|^r$ est exponentiellement intégrable sur tout compact. Plus précisément, il existe une constante ne dépendant que de d, κ et r, que l'on note $C_{d,\kappa,r}$, *telle que pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ et pour tout ε vérifiant*

$$0 \leqslant \varepsilon < \frac{\log(2)\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{-1}}{2C_{d,\kappa,r}},$$

on a l'inégalité

$$\begin{aligned}&\int_K \mathrm{e}^{\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x)\\ &\leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K) + \frac{2\varepsilon C_{d,\kappa,r}\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}\max\Big\{2\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K);\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\operatorname{supp}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)\Big\}}{\log(2)-2\varepsilon C_{d,\kappa,r}\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}}.\end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons avoir besoin de trois lemmes. Le premier concerne une égalité fonctionnelle valable sur un espace mesurable quelconque.

Lemme 3.2. *Soit X un espace mesurable et soit m une mesure positive sur X. Soit φ une fonction définie et croissante sur $[0,+\infty[$, vérifiant $\varphi(0)=0$ et appartenant à $\mathcal{C}^1([0,+\infty[)$. Pour toute fonction f mesurable sur X on a l'égalité suivante*

$$\int_X \varphi\big(|f(x)|\big)\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^{+\infty}\varphi'(\lambda)m\Big(\Big\{x\in X : |f(x)|>\lambda\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Démonstration. Puisque φ' est positive, on peut écrire grâce au théorème de Fubini

$$\int_0^{+\infty}\varphi'(\lambda)m\Big(\Big\{x\in X : |f(x)|>\lambda\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda = \int_X\left(\int_0^{|f(x)|}\varphi'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}m(x).$$

On obtient le résultat voulu en intégrant et en utilisant le fait que $\varphi(0)=0$. □

Le deuxième lemme donne des précisions sur le comportement des constantes du théorème 2.27 lorsque, r étant fixé, on fait tendre p vers l'infini. La condition d'intégrabilité exponentielle est d'ailleurs intimement liée à ce comportement.

Lemme 3.3. *La constante $C(d,\kappa,p,r)$ du théorème maximal vectoriel 2.27 est telle que*

$$C(d,\kappa,p,r) = \underset{p\to+\infty}{O}\big(p^{\frac{1}{r}}\big).$$

Démonstration. Le paramètre r étant fixé, il suffit de reprendre la preuve du théorème 2.27 dans le cas où $p>r$.
On voit alors sans difficulté que la dépendance en p n'intervient qu'à travers la constante, à la puissance $\frac{1}{r}$, du théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ et pour l'espace $L^{\frac{p}{p-r}}(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$. Cette constante étant obtenue par interpolation, on peut donc écrire que

$$C(d,\kappa,p,r) = C(d,\kappa,r)\left(C(d,\kappa)\frac{\frac{p}{p-r}}{\frac{p}{p-r}-1}\right)^{\frac{p-r}{pr}}.$$

On a bien évidemment

$$\left(C(d,\kappa)\frac{\frac{p}{p-r}}{\frac{p}{p-r}-1}\right)^{\frac{p-r}{p}} = \underset{p\to+\infty}{O}(p),$$

et le lemme est ainsi prouvé. □

Le dernier lemme dont nous allons avoir besoin fournit une estimation qui s'avérera décisive dans la preuve du théorème 3.1.

Lemme 3.4. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$ et soit $1 < r < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^\infty(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ est telle que*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\operatorname{supp}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right) < +\infty,$$

alors pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ et pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x\in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right)$$
$$\leqslant \max\left\{2\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K);\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\operatorname{supp}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right)\right\}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\log(2)\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{-1}}{2C}\right)\lambda},$$

où $C = C(d,\kappa,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$, de K et de λ.

Démonstration. Pour tout p vérifiant $1 \leqslant p < +\infty$, on peut écrire d'après l'inégalité de Chebyshev

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x\in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda^p}\int_{\left\{x\in K:\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}f_n(x)|^r>\lambda\right\}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}f_n(x)|^r\right)^p \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

ce qui implique en élargissant le domaine d'intégration

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x\in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}f_n(x)|^r\right)^{\frac{pr}{r}} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x).$$

En utilisant les inégalités de Fefferman-Stein pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$ on aboutit à

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x\in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{\big(C(d,\kappa,pr,r)\big)^{pr}}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x)|^r\right)^{\frac{pr}{r}} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

où $C = C(d,\kappa,pr,r)$ est la constante qui apparaît dans le théorème 2.27 (et qui est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$, de K et de λ). En appliquant le résultat du lemme 3.3, on a l'inégalité

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x\in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{Cp^p}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x)|^r\right)^{p} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

avec $C = C(d,\kappa,r)$ indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$, de K, de λ et de p. Les hypothèses sur la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ permettent alors d'écrire

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x\in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right)$$
$$\leqslant \left(\frac{Cp\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}}{\lambda}\right)^p\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\operatorname{supp}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right). \quad (3.1)$$

Nous allons maintenant choisir p en fonction de λ.

Si $\lambda \geqslant 2C\big\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}$, on pose alors

$$p = \frac{\lambda}{2C\big\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}} \geqslant 1.$$

L'inégalité (3.1) s'écrit donc dans ce cas

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\operatorname{supp}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}&\left(\left\{x \in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right)\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\left(\frac{\log(2)\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{-1}}{2C}\right)\lambda} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\operatorname{supp}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right). \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Si $\lambda \leqslant 2C\big\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}$, on écrit directement dans ce cas

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right) \leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K),$$

et puisque

$$\mathrm{e}^{-\left(\frac{\log(2)\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{-1}}{2C}\right)\lambda} \geqslant \frac{1}{2},$$

on a donc

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in K : \sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right) \leqslant 2\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\log(2)\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{-1}}{2C}\right)\lambda}. \qquad (3.3)$$

Le résultat attendu est donc une simple conséquence des inégalités (3.2) et (3.3). $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de donner la preuve du théorème 3.1.

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et soit ε vérifiant

$$0 \leqslant \varepsilon < \frac{\log(2)\big\|\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{-1}}{2C_{d,\kappa,r}},$$

où $C_{d,\kappa,r}$ est la constante du lemme 3.4. Écrivons pour commencer que

$$\int_K \mathrm{e}^{\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) = \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K) + \int_K\left(\mathrm{e}^{\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r} - 1\right)\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x).$$

On applique alors l'égalité du lemme 3.2 à la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{\varepsilon t} - 1$ pour obtenir

$$\int_K \mathrm{e}^{\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r} \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) = \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K) + \varepsilon \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\varepsilon\lambda} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in K : \sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r > \lambda\right\}\right) \mathrm{d}\lambda.$$

En appliquant l'inégalité du lemme 3.4, on aboutit à

$$\int_K \mathrm{e}^{\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r} \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K)$$
$$+ 2\varepsilon \max\left\{2\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(K); \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\operatorname{supp} \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)\right\} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\left(\varepsilon - \frac{\log(2) \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r \right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{-1}}{2C_{d,\kappa,r}}\right)} \mathrm{d}\lambda.$$

La condition sur ε et une intégration permettent de conclure. □

Nous en venons maintenant à la deuxième partie de ce chapitre dans laquelle nous allons énoncer des inégalités de Fefferman-Stein dans le cadre des hypergroupes de Bessel-Kingman. Si cette partie est complètement indépendante de la précédente, il n'en reste pas moins que c'est, tout comme la condition d'intégrabilité exponentielle, un résultat lié au théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$. De plus, il faut souligner que l'analyse de Dunkl unidimensionnelle et l'analyse sur les hypergroupes unidimensionnels de Bessel-Kingman sont intimement liées, et que ce lien a été principalement mis en évidence par le travail de Rösler sur les hypergroupes signés de type Bessel sur $\mathbb{R}$ ([39]).

3.2 Hypergroupes de Bessel-Kingman

Nous présentons dans cette section un théorème maximal vectoriel dans le cadre des hypergroupes de Bessel-Kingman. À cet effet, nous verrons que la preuve donnée dans le cadre de l'analyse de Dunkl est parfaitement adaptable dans le contexte que nous allons considérer.

Schématiquement, un hypergroupe est un espace topologique X non vide, séparé, localement compact et dont l'espace des mesures sur X qui sont bornées est muni d'une structure convolutive vérifiant certaines propriétés. Cette notion d'hypergroupe, apparue dans le courant des années 30, a été considérablement développée à partir des années 70, lorsque les travaux de Dunkl ([15]), Jewett ([30]) et Spector ([46]) ont permis d'établir une définition axiomatique rigoureuse en vue de faire de l'analyse harmonique associée à ces objets.

La section est organisée de la manière suivante. Nous commencerons par donner pour la commodité du lecteur la définition générale d'un hypergroupe, puis nous nous focaliserons immédiatement sur une classe particulière d'hypergroupes unidimensionnels, la classe de Chébli-Trimèche. Après une description rapide de cette classe d'hypergroupes, nous introduirons un opérateur maximal vectoriel non centré dans le cas particulier des hypergroupes de Bessel-Kingman. Nous énoncerons alors des inégalités de Fefferman-Stein pour cet opérateur et donnerons une preuve succincte de ces inégalités en nous appuyant

sur le cadre de l'analyse de Dunkl.
Pour une étude approfondie de la théorie générale des hypergroupes, nous renvoyons au livre de Bloom et Heyer ([7]).

3.2.1 Définition générale d'un hypergroupe

Commençons par introduire quelques notations et concepts.

Espaces de mesures Pour un espace topologique X non vide, séparé et localement compact, on désignera par $M^b(X)$ (respectivement $M^1(X)$) l'ensemble des mesures complexes de Borel régulières sur X qui sont bornées (respectivement qui sont de probabilités). On munit $M^b(X)$ de la topologie faible définie par la dualité entre $M^b(X)$ et $\mathcal{C}_0(X)$.

Topologie de Michael Notons $\mathscr{C}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X qui sont non vides et compacts. On munit cet ensemble de la topologie de Michael. Plus précisément, en notant $\mathcal{O}_X$ la famille des ouverts de X, on définit la famille des ouverts de $\mathscr{C}(X)$, notée $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(X)}$, par

$$\mathcal{O}_{\mathscr{C}(X)} = \big\{ \langle \mathcal{O}_j \rangle_{j\in J} : J \text{ fini et } \mathcal{O}_j \in \mathcal{O}_X \ \forall j \in J \big\},$$

avec

$$\langle \mathcal{O}_j \rangle_{j\in J} = \Big\{ C \subset \mathscr{C}(X) : C \subset \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j \text{ et } C \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset \ \forall j \in J \Big\}.$$

Pour une étude détaillée de cette topologie, nous renvoyons à l'article de Michael ([35]).

Nous sommes maintenant en mesure de donner la définition d'un hypergroupe.

Définition 3.5. Soit X un espace topologique non vide, séparé et localement compact. Le triplet $(M^b(X), +, \star)$ est un hypergroupe si les conditions suivantes sont satisfaites.

1. $(M^b(X), +, \star)$ est une algèbre.
2. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in X$, la mesure $\delta_x \star \delta_y$ est une mesure de probabilité à support compact.
3. L'application
$$\begin{cases} X \times X & \to M^1(X) \\ (x, y) & \mapsto \delta_x \star \delta_y \end{cases}$$
est continue pour la topologie faible.
4. L'application
$$\begin{cases} X \times X & \to \mathscr{C}(X) \\ (x, y) & \mapsto \operatorname{supp}(\delta_x \star \delta_y) \end{cases}$$
est continue pour la topologie de Michael.
5. Il existe un élément $e \in X$ (nécessairement unique et appelé élément neutre) tel que pour tout $x \in X$
$$\delta_x \star \delta_e = \delta_e \star \delta_x = \delta_x.$$
6. Il existe une involution sur X (nécessairement unique et notée inv) telle que pour tout $x \in X$, tout $y \in X$ et tout $f \in \mathcal{C}_c(X)$
$$\int_X (f \circ \mathrm{inv})\, \mathrm{d}(\delta_x \star \delta_y) = \int_X f\, \mathrm{d}(\delta_{\mathrm{inv}(y)} \star \delta_{\mathrm{inv}(x)}).$$

7. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in X$, $e \in \operatorname{supp}(\delta_x \star \delta_y)$ si et seulement si $x = \operatorname{inv}(y)$.

En outre, l'hypergroupe est dit commutatif si l'algèbre $(M^b(X), +, \star)$ est commutative et il est dit hermitien si l'involution est l'identité.

Nous allons restreindre notre discussion à une classe particulière d'hypergroupes unidimensionnels, celle de Chébli-Trimèche.

3.2.2 La classe d'hypergroupes de Chébli-Trimèche

Pour présenter cette classe d'hypergroupes (qui est en fait un cas particulier de la classe plus large à laquelle ils appartiennent, à savoir celle de Sturm-Liouville), on a besoin au préalable de définir la notion de fonction de Chébli-Trimèche et d'introduire un opérateur différentiel du second ordre associé à ce type de fonction.

Définition 3.6. On dit d'une fonction $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ qu'elle est de Chébli-Trimèche si elle vérifie les propriétés suivantes.

1. $A(0) = 0$ et pour tout $x > 0$, $A(x) > 0$.
2. A est croissante et non bornée.
3. $\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{2\alpha+1}{x} + B(x)$ sur un voisinage de 0, avec $\alpha > -\frac{1}{2}$ et B qui est une fonction impaire appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
4. $\frac{A'}{A}$ est une fonction décroissante appartenant à $\mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$.

Remarque 3.7. Pour une telle fonction, la quantité suivante existe

$$\rho = \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{A'(x)}{A(x)} \right) \geqslant 0.$$

Étant donné une fonction A de Chébli-Trimèche, on considère l'opérateur différentiel du second ordre L_A donné pour tout $f \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ par

$$L_A f = -f'' - \frac{A'}{A} f,$$

et on définit alors pour tout $u \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[\times]0, +\infty[)$ l'opérateur différentiel $\mathcal{L}_A$ suivant

$$\mathcal{L}_A u(x, y) = L_A u(\cdot, y)(x) - L_A u(x, \cdot)(y).$$

On peut désormais introduire la classe d'hypergroupes de Chébli-Trimèche.

Définition 3.8. On dit d'un hypergroupe $(M^b(\mathbb{R}_+), +, \star)$ qu'il est de Chébli-Trimèche s'il existe une fonction A de Chébli-Trimèche telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ positive, la fonction u_f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par

$$u_f(x, y) = \int_{\mathbb{R}_+} f \, \mathrm{d}(\delta_x \star \delta_y)$$

est solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \mathcal{L}_A u_f(x, y) & = 0; \\ u(x, 0) & = f(x) \quad \forall x > 0; \\ \partial u(x, \cdot)(0) & = 0 \quad \forall x > 0. \end{cases}$$

On note communément cet hypergroupe $(M^b(\mathbb{R}_+), +, \star(A))$.

Zeuner a montré dans [62] que ces hypergroupes sont commutatifs et hermitiens et qu'ils ont pour élément neutre 0. Puisqu'ils sont commutatifs, on sait d'après un théorème de Spector ([46]) qu'ils possèdent une unique (à constante multiplicative près) mesure de Haar ω_A qui vérifie $\operatorname{supp}\omega_A = \mathbb{R}_+$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\omega_A \star \delta_x = \delta_x \star \omega_A = \omega_A.$$

D'après Zeuner ([62]), on sait de plus que cette mesure de Haar s'écrit

$$\mathrm{d}\omega_A(x) = A(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemples Même si nous ne travaillerons qu'avec un seul type d'hypergroupe de Chébli-Trimèche, on présente tout de même les deux exemples fondamentaux de cette classe d'hypergroupes.

Hypergroupes de Bessel-Kingman Les hypergroupes de Bessel-Kingman sont des hypergroupes du type $(M^b(\mathbb{R}_+), +, \star(A))$, où la fonction de Chébli-Trimèche A est donnée par

$$A(x) = x^{2\alpha+1}, \quad \alpha > -\frac{1}{2},$$

et la structure de convolution par

$$\mathrm{d}(\delta_x \star \delta_y)(z) = K_{\alpha+\frac{1}{2}}(x,y,z) z^{2\alpha+1}\,\mathrm{d}z,$$

où l'on rappelle (voir notations 2.12) que pour tout $\kappa > 0$

$$K_\kappa(x,y,z) = 2^{2\kappa-2}\mathscr{B}^{-1}\Big(\kappa, \frac{1}{2}\Big)\frac{\Delta(x,y,z)^{2\kappa-2}}{(xyz)^{2\kappa-1}}\chi_{[|x-y|,x+y]}(z).$$

Hypergroupes de Jacobi Les hypergroupes de Jacobi sont des hypergroupes du type $(M^b(\mathbb{R}_+), +, \star(A))$, où la fonction de Chébli-Trimèche A est donnée par

$$A(x) = \sinh^{2\alpha+1} x \cosh^{2\beta+1} x, \quad \alpha \geqslant \beta \geqslant -\frac{1}{2} \;\text{ et }\; \alpha \neq -\frac{1}{2},$$

et la structure de convolution par

$$\mathrm{d}(\delta_x \star \delta_y)(z) = k_{\alpha,\beta}(x,y,z) \sinh^{2\alpha+1} z \cosh^{2\beta+1} z\,\mathrm{d}z,$$

où $k_{\alpha,\beta}$ est donné par

$$k_{\alpha,\beta}(x,y,z) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma\big(\beta+\frac{1}{2}\big)}(\sinh x \sinh y \sinh z)^{-2\alpha}\chi_{[|x-y|,x+y]}(z)\times$$
$$\int_0^\pi \big(1-\cosh^2 x - \cosh^2 y - \cosh^2 z + 2\cosh x\cosh y\cosh z\cosh t\big)^{\alpha-\beta-1}(\sin t)^{2\beta}\,\mathrm{d}t.$$

Lien avec les formules produits Ces deux exemples soulignent bien l'importance du fait suivant. Le choix de la structure convolutive est intimement lié à la fonction de Chébli-Trimèche A et à l'opérateur L_A associé.
Plus précisément, pour une fonction A de Chébli-Trimèche donnée, on définit pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ la fonction $\phi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ comme étant l'unique solution du système différentiel suivant

$$\begin{cases} L_A\phi_\lambda(x) & = (\lambda^2+\rho^2)\phi_\lambda(x) \\ \phi_\lambda(0) & = 1 \\ \phi'_\lambda(0) & = 0 \end{cases}$$

où l'on rappelle que $\rho = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{A'(x)}{A(x)}\right)$. Zeuner a démontré (voir [62]) qu'il existe une unique opération $\star$ telle que $(M^b(\mathbb{R}_+), +, \star)$ est un hypergroupe et telle que

$$\phi_\lambda(x)\phi_\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}_+} \phi_\lambda \,\mathrm{d}(\delta_x \star \delta_y), \quad x, y \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pour construire une structure d'hypergroupe de Chébli-Trimèche, il suffit donc de définir une convolution par identification avec la mesure qui apparaît dans la formule produit des fonctions solutions du système différentiel précédent. Illustrons ces propos en reprenant les deux exemples cités plus haut.

Le cas des fonctions de Bessel normalisées Pour $\alpha > -\frac{1}{2}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $\phi_\lambda : x \mapsto j_\alpha(\lambda x)$ (avec j_α la fonction de Bessel normalisée d'ordre α) est définie comme la fonction paire élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut 1 en $x = 0$ et qui satisfait l'équation différentielle suivante

$$\frac{1}{x^{2\alpha+1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{2\alpha+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi_\lambda(x)\right) + \lambda^2\phi_\lambda(x) = 0,$$

c'est-à-dire $L_A\phi_\lambda(x) = \lambda^2\phi_\lambda(x)$ avec $A(x) = x^{2\alpha+1}$. Puisque l'on dispose de la formule produit suivante (voir [58])

$$\phi_\lambda(x)\phi_\lambda(y) = \int_0^{+\infty} \phi_\lambda(z)K_{\alpha+\frac{1}{2}}(x,y,z)A(z)\,\mathrm{d}z,$$

on construit un hypergroupe de Chébli-Trimèche en posant

$$\mathrm{d}(\delta_x \star \delta_y)(z) = K_{\alpha+\frac{1}{2}}(x,y,z)z^{2\alpha+1}\,\mathrm{d}z.$$

Le cas des fonctions de Jacobi Pour $\alpha \geqslant \beta \geqslant -\frac{1}{2}$ avec $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction de Jacobi $x \mapsto \phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)$ est définie comme la fonction paire élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut 1 en $x = 0$ et qui satisfait l'équation différentielle suivante (où l'on note $A_{\alpha,\beta}(x) = \sinh^{2\alpha+1} x \cosh^{2\beta+1} x$)

$$\frac{1}{A_{\alpha,\beta}(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A_{\alpha,\beta}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)\right) + (\lambda^2+\rho^2)\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x) = 0,$$

c'est-à-dire $L_{A_{\alpha,\beta}}\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x) = (\lambda^2+\rho^2)\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)$. Puisque l'on dispose de la formule produit suivante (voir [25])

$$\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(y) = \int_0^{+\infty} \phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(z)k_{\alpha,\beta}(x,y,z)A_{\alpha,\beta}(z)\,\mathrm{d}z,$$

on construit un hypergroupe de Chébli-Trimèche en posant

$$\mathrm{d}(\delta_x \star \delta_y)(z) = k_{\alpha,\beta}(x,y,z) A_{\alpha,\beta}(z)\,\mathrm{d}z.$$

L'analyse harmonique associée aux hypergroupes de Chébli-Trimèche a considérablement été développée depuis la fin des années 80. En particulier, une théorie des fonctions maximales dans ce cadre a été entreprise par Stempak ([53]), et par Bloom et Xu ([8, 9]). Nous allons compléter cette théorie en démontrant des inégalités de Fefferman-Stein pour les hypergroupes de Bessel-Kingman. Le cas des hypergroupes de Chébli-Trimèche avec $\rho > 0$ (comme par exemple les hypergroupes de Jacobi) semble plus difficile dans la mesure où la croissance du volume est exponentielle. En effet, le point 4. de la définition 3.6 entraîne que pour tout $x \geqslant 1$

$$A(1)\mathrm{e}^{2\rho(x-1)} \leqslant A(x).$$

Bien qu'un théorème maximal scalaire ait été démontré par Bloom et Xu dans le cas $\rho > 0$ ([8]), un théorème maximal vectoriel paraît, pour le moment, beaucoup plus difficile à établir. D'ailleurs, à notre connaissance, aucun théorème maximal vectoriel n'existe dans le cadre de structures où la croissance du volume est exponentielle, alors qu'il existe des théorèmes scalaires pour de telles structures, comme par exemple dans le cas des espaces symétriques de type non compact (voir l'article de Strömberg [54]).

3.2.3 Opérateur maximal non centré pour les hypergroupes de Bessel-Kingman

On se place pour toute cette sous-section dans le cadre d'un hypergroupe de Bessel-Kingman, c'est-à-dire que, pour $\alpha > -\frac{1}{2}$, on considère la fonction A définie sur $\mathbb{R}_+$ par $A(x) = x^{2\alpha+1}$, et que l'on considère la structure de convolution donnée par

$$\mathrm{d}(\delta_x \star \delta_y)(z) = K_{\alpha+\frac{1}{2}}(x,y,z)A(z)\,\mathrm{d}z = K_{\alpha+\frac{1}{2}}(x,y,z)\,\mathrm{d}\omega_A(z).$$

On désignera par L^p_A (pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) l'espace $L^p(\mathbb{R}_+;\omega_A)$, et on notera $\|\cdot\|_{A,p}$ la norme associée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur de translation $\mathcal{T}^\alpha_x$ est défini par

$$\mathcal{T}^\alpha_x f(y) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z)\,\mathrm{d}(\delta_x \star \delta_y)(z) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z) K_{\alpha+\frac{1}{2}}(x,y,z)\,\mathrm{d}\omega_A(z),$$

et l'on sait d'après Achour et Trimèche (voir [2]) que cet opérateur positif est L^p_A-contractant, c'est-à-dire qu'il vérifie pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

$$\|\mathcal{T}^\alpha_x f\|_{A,p} \leqslant \|f\|_{A,p}.$$

On introduit maintenant un opérateur maximal non centré dans ce contexte.

Définition 3.9. On définit l'opérateur maximal non centré associé à un hypergroupe de Bessel-Kingman en posant pour tout $f \in L^1_A$

$$M_A f(x) = \sup_{\varepsilon>0,\, z\in I(x,\varepsilon)} \frac{1}{\omega_A(]0,\varepsilon[)} \int_0^\varepsilon \mathcal{T}^\alpha_z |f|(y)\,\mathrm{d}\omega_A(y), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

où l'on désigne par $\omega_A(X)$ la mesure de Haar de l'ensemble X, et où l'on rappelle que (voir la notation 2.21)

$$I(x,\varepsilon) =]\max\{0; x-\varepsilon\}, x+\varepsilon[.$$

Nous allons prouver pour cet opérateur le théorème maximal vectoriel suivant.

Théorème 3.10. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}_+$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^1_A$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\omega_A\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}_+ : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_A f_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{A,1},$$

où $C = C(\alpha, r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^p_A$, alors on a*

$$\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_A f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{A,p} \leqslant C\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{A,p},$$

où $C = C(\alpha, p, r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour prouver ce théorème, nous adoptons la même stratégie que dans le cadre de l'analyse de Dunkl, c'est-à-dire que nous allons construire un opérateur maximal pour lequel nous pouvons utiliser les outils d'analyse réelle. Pour cela, nous devons nous débarrasser de l'opérateur de translation. Dans cette optique, la proposition suivante va jouer un rôle capital. Elle est due à Bloom et Xu (voir [8]).

Proposition 3.11. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, tout $y \in \mathbb{R}_+$ et tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$|\mathcal{T}_x^\alpha(\chi_{]0,\varepsilon[})(y)| \leqslant C\frac{\omega_A(]0,\varepsilon[)}{\omega_A(I(x,\varepsilon))},$$

où $C = C(\alpha)$ est une constante indépendante de x, y, ε.

Remarque 3.12. Ce résultat constitue l'analogue du théorème 2.23 qu'Abdelkefi et Sifi avaient démontré en s'appuyant sur la preuve de cette proposition. Le lien entre la translation de Dunkl unidimensionnelle et l'opérateur de translation d'un hypergroupe de Bessel-Kingman est de toutes façons étroit. On peut en effet prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et tout $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\alpha+\frac{1}{2}}(\chi_{]-\varepsilon,\varepsilon[})(y) \leqslant 4\mathcal{T}_{|x|}^\alpha(\chi_{]0,\varepsilon[})(|y|).$$

La proposition précédente motive l'introduction de l'opérateur suivant.

Définition 3.13. Soit $\mathcal{M}_A$ l'opérateur maximal à poids défini pour toute fonction f mesurable sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\mathcal{M}_A f(x) = \sup_{\varepsilon>0,\, z\in I(x,\varepsilon)} \frac{1}{\omega_A(I(z,\varepsilon))}\int_{I(z,\varepsilon)} |f(y)|\,\mathrm{d}\omega_A(y).$$

Montrons maintenant que cet opérateur contrôle notre opérateur maximal non centré.

Proposition 3.14. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a l'inégalité de contrôle suivante*

$$M_A f(x) \leqslant C\mathcal{M}_A f(x), \tag{3.4}$$

où $C = C(\alpha)$ est indépendante de f et de x.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ et $z \in I(x,\varepsilon)$. Il est facile de voir que

$$\int_0^\varepsilon \mathcal{T}_z^\alpha |f|(y)\,\mathrm{d}\omega_A(y) = \int_{\mathbb{R}_+} |f(y)| \mathcal{T}_z^\alpha(\chi_{]0,\varepsilon[})(y)\,\mathrm{d}\omega_A(y).$$

En remarquant l'implication suivante

$$y \notin I(z,\varepsilon) \Longrightarrow \mathcal{T}_z^\alpha(\chi_{]0,\varepsilon[})(y) = 0,$$

il s'ensuit que

$$\int_0^\varepsilon \mathcal{T}_z^\alpha |f|(y)\,\mathrm{d}\omega_A(y) = \int_{I(z,\varepsilon)} |f(y)| \mathcal{T}_z^\alpha(\chi_{]0,\varepsilon[})(y)\,\mathrm{d}\omega_A(y).$$

L'utilisation de la proposition (3.11) entraîne alors que

$$\int_0^\varepsilon \mathcal{T}_z^\alpha |f|(y)\,\mathrm{d}\omega_A(y) \leqslant C \frac{\omega_A(]0,\varepsilon[)}{\omega_A(I(z,\varepsilon))} \int_{I(z,\varepsilon)} |f(y)|\,\mathrm{d}\omega_A(y),$$

où C est une constante ne dépendant que de α. On en déduit donc aisément que

$$M_A f(x) \leqslant C \mathcal{M}_A f(x),$$

et la proposition est ainsi démontrée. □

Grâce à cette proposition, il nous suffit de démontrer le théorème maximal vectoriel suivant pour prouver le théorème 3.10.

Théorème 3.15. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}_+$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^1_A$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\omega_A\left(\left\{x \in \mathbb{R}_+ : \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\mathcal{M}_A f_n(x)|^r\right)^{\frac{1}{r}} > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{C}{\lambda} \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{A,1},$$

où $C = C(\alpha, r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^p_A$, alors on a*

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\mathcal{M}_A f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{A,p} \leqslant C \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{A,p},$$

où $C = C(\alpha, p, r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

On prouve ce théorème en adoptant la stratégie utilisée dans le cadre de l'analyse de Dunkl. En effet, l'opérateur $\mathcal{M}_A$ est un opérateur non centré de type Hardy-Littlewood pour lequel on peut montrer, en suivant une nouvelle fois la méthode du chapitre 2, un théorème maximal et une inégalité à poids qui, combinés à une décomposition de Calderón-Zygmund, permettent d'affirmer que le théorème 3.15 est vrai.

Remarques 3.16. 1. Le théorème maximal vectoriel pour M_A implique un résultat similaire pour l'opérateur maximal centré d'un hypergroupe de Bessel-Kingman.

Cet opérateur, que l'on note $\mathscr{M}_A$, a été étudié par Stempak ([53]) et par Bloom et Xu ([8]). Il est défini par

$$\mathscr{M}_A f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\omega_A(]0,\varepsilon[)} \int_0^\varepsilon \mathcal{T}_x^\alpha |f|(y)\,\mathrm{d}\omega_A(y).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in]0,+\infty[$ il est évident que $x \in I(x,\varepsilon)$ et on a alors

$$\mathscr{M}_A f(x) \leqslant M_A f(x).$$

Cette inégalité de contrôle et le théorème 3.10 impliquent que $\mathscr{M}_A$ vérifie des inégalités de Fefferman-Stein.

2. On peut également démontrer, dans le cadre de l'analyse de Dunkl associée à $\mathbb{Z}_2$, un théorème maximal vectoriel pour l'opérateur maximal non centré défini par

$$\mathcal{M}_\kappa^{\mathbb{Z}_2} f(x) = \sup_{r>0,\, z\in I(x,r)} \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau_z^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(-y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(y) \right|,$$

et pour lequel Abdelkefi et Sifi ont démontré en 2007 un théorème maximal scalaire (voir [1]).

Chapitre 4

Noyau et translation de Dunkl dans le cas d'un sous-système positif de racines orthogonales

Dans ce chapitre, on cherche à développer l'analyse de Dunkl dans le cas où le sous-système positif de racines considéré est composé de m vecteurs (avec $1 \leqslant m \leqslant d$) deux à deux orthogonaux.
En nous appuyant sur la formule de l'opérateur d'entrelacement récemment prouvée par Maslouhi et Youssfi dans [34], nous donnerons une formule explicite du noyau de Dunkl dans ce cadre là et nous établirons alors une formule produit pour ce noyau. Nous étudierons ensuite plus en détails le cas d'un système de racines de type $\mathcal{A}_1$. À cet effet, nous introduirons principalement les notions de polynôme de Jack et de fonction hypergéométrique multivariée qui nous seront utiles pour démontrer une égalité de fonctions spéciales. Enfin, nous verrons que la formule produit permet de démontrer classiquement que la translation de Dunkl est bornée. La plupart des résultats de l'analyse de Dunkl associée à $\mathbb{Z}_2^d$ semble donc généralisable dans ce contexte.

4.1 Noyau de Dunkl et formule produit

Commençons par définir le cadre de travail de ce chapitre.
On considère un sous-système positif de racines $\mathcal{R}_+ = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$ constitué de m vecteurs de $\mathbb{R}^d$ deux à deux orthogonaux (avec $1 \leqslant m \leqslant d$). On complète la famille $\{\alpha^j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ avec $d-m$ vecteurs notés $\beta^1, \ldots, \beta^{d-m}$ de telle sorte que la famille $\{\alpha^j, \beta^l : 1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant l \leqslant d-m\}$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^d$.
On fixe également une fonction de multiplicité κ associée au système de racines $\mathcal{R} = \{\pm\alpha^j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Puisqu'il y a m classes de conjugaison de réflexions de $W(\mathcal{R})$, cette fonction de multiplicité prend m valeurs, notées $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$, qui sont respectivement associées à $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ et que l'on suppose strictement positives. La mesure μ_κ^W est dans ce cas donnée par

$$\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) = \prod_{j=1}^m |\langle x, \alpha^j \rangle|^{2\kappa_j}\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout le chapitre, on notera par souci de simplification W le groupe de réflexions associé à $\mathcal{R}$ (plutôt que $W(\mathcal{R})$).

4.1.1 Formule explicite du noyau et formule produit

Nous allons donner dans cette sous-section une expression explicite du noyau de Dunkl associé à W ainsi qu'une formule produit pour ce noyau. Pour cela, commençons par rappeler la représentation intégrale suivante de l'opérateur d'entrelacement V_κ^W, récemment démontrée par Maslouhi et Youssfi ([34]).

Théorème 4.1. *Soit $\mathcal{R}_+ = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$ constitué de m vecteurs de $\mathbb{R}^d$ deux à deux orthogonaux (avec $1 \leqslant m \leqslant d$) et soit W le groupe de réflexions associé. Notons κ_j la valeur de la fonction de multiplicité en α^j. Soit la fonction $h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par*

$$h(t,x) = x + \sum_{j=1}^{m} (t_j - 1) \frac{\langle x, \alpha^j \rangle}{\langle \alpha^j, \alpha^j \rangle} \alpha^j.$$

Alors, l'opérateur d'entrelacement V_κ^W est donné par la représentation intégrale suivante

$$V_\kappa^W f(x) = \int_{[-1,1]^m} f\big(h(t,x)\big) \prod_{j=1}^{m} \mathscr{B}^{-1}\Big(\kappa_j, \frac{1}{2}\Big)(1+t_j)(1-t_j^2)^{\kappa_j - 1}\, \mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

Remarque 4.2. Cette formule généralise celle du cadre $\mathbb{Z}_2^d$ démontrée par Xu (voir [60]) et rappelée dans le théorème 1.10.

On va bien évidemment utiliser la formule (4.1) pour en déduire une expression explicite du noyau de Dunkl. Au préalable, on introduit des notations.

Notations 4.3. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on désignera respectivement par x_{α^j} et x_{β^l} (pour $1 \leqslant j \leqslant m$ et $1 \leqslant l \leqslant d - m$) les réels suivants

$$x_{\alpha^j} = \frac{\langle x, \alpha^j \rangle}{\|\alpha^j\|}, \quad x_{\beta^l} = \frac{\langle x, \beta^l \rangle}{\|\beta^l\|}.$$

On désignera par $x_{\alpha,\beta}$ le vecteur de $\mathbb{R}^d$ suivant

$$x_{\alpha,\beta} = (x_{\alpha^1}, \ldots, x_{\alpha^m}, x_{\beta^1}, \ldots, x_{\beta^{d-m}}).$$

Enfin, on notera $\overline{\kappa}^m$ la fonction de multiplicité associée au système de racines de $\mathbb{R}^m$ $\mathcal{R} = \{\pm e_j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ telle que pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$

$$\overline{\kappa}^m(e_j) = \kappa_j,$$

et on notera $\overline{\kappa}^d$ la fonction de multiplicité associée au système de racines de $\mathbb{R}^d$ $\mathcal{R} = \{\pm e_j : 1 \leqslant j \leqslant d\}$ telle que

$$\overline{\kappa}^d(e_j) = \begin{cases} \kappa_j & \text{si } \ 1 \leqslant j \leqslant m \\ 0 & \text{si } \ m < j \leqslant d. \end{cases}$$

On peut maintenant donner la formule du noyau.

Proposition 4.4. *Soit x, y deux éléments de $\mathbb{R}^d$. On a*

$$E_\kappa^W(ix, y) = E_{\overline{\kappa}^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(ix_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}). \tag{4.2}$$

Démonstration. En appliquant le théorème précédent à la fonction $y \mapsto \mathrm{e}^{i\langle x,y\rangle}$, on obtient

$$E_k^W(ix,.)(y) = V_\kappa^W(\mathrm{e}^{i\langle x,.\rangle})(y) = \int_{[-1,1]^m} \mathrm{e}^{i\langle x,h(t,y)\rangle} \prod_{j=1}^m \mathscr{B}^{-1}\Big(\kappa_j, \frac{1}{2}\Big)(1+t_j)(1-t_j^2)^{\kappa_j-1}\,\mathrm{d}t.$$

En remarquant que

$$h(t,y) = \sum_{j=1}^m t_j \frac{y_{\alpha^j}}{\|\alpha^j\|}\alpha^j + \sum_{l=1}^{d-m} \frac{y_{\beta^l}}{\|\beta^l\|}\beta^l,$$

on aboutit alors à

$$E_\kappa^W(ix,y) = \prod_{l=1}^{d-m} \mathrm{e}^{ix_{\beta^l}y_{\beta^l}} \prod_{j=1}^m \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{it_jx_{\alpha^j}y_{\alpha^j}} \mathscr{B}^{-1}\Big(\kappa_j, \frac{1}{2}\Big)(1+t_j)(1-t_j^2)^{\kappa_j-1}\,\mathrm{d}t_j.$$

En utilisant la formule de l'opérateur d'entrelacement dans le cas $\mathbb{Z}_2$ (égalité (1.1) du théorème 1.10 dans le cas où $d=1$), on obtient

$$E_\kappa^W(ix,y) = \prod_{l=1}^{d-m} \mathrm{e}^{ix_{\beta^l}y_{\beta^l}} \prod_{j=1}^m E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(ix_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}),$$

et le résultat s'en déduit trivialement. □

Remarque 4.5. Bien évidemment, la formule de la proposition 4.4 est indépendante du choix des vecteurs β_l. Cela est tout simplement dû au fait que l'on a

$$\prod_{l=1}^{d-m} \mathrm{e}^{ix_{\beta^l}y_{\beta^l}} = \mathrm{e}^{i\langle x,y\rangle}\mathrm{e}^{-i\sum_{j=1}^m x_{\alpha^j}y_{\alpha^j}}.$$

On peut donc écrire le noyau comme suit

$$E_\kappa^W(ix,y) = \mathrm{e}^{i\langle x,y\rangle}\mathrm{e}^{-i\sum_{j=1}^m \frac{\langle x,\alpha^j\rangle\langle y,\alpha^j\rangle}{\|\alpha^j\|^2}} \prod_{j=1}^m E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}\Big(i\frac{\langle x,\alpha^j\rangle}{\|\alpha^j\|}, \frac{\langle y,\alpha^j\rangle}{\|\alpha^j\|}\Big). \tag{4.3}$$

Remarque 4.6. Signalons que la formule (4.3) est en accord avec un résultat de Gallardo et Godefroy que nous allons présenter dans cette remarque.
Dans l'article [26], ils ont notamment démontré (pour un système de racines $\mathcal{R}$ fixé et le groupe de réflexions W associé) qu'il existe une unique (à permutation près) décomposition de $\mathbb{R}^d$ sous la forme

$$\mathbb{R}^d = \mathcal{V}_0 \oplus^\perp \mathcal{V}_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp \mathcal{V}_N,$$

où $\mathcal{V}_0 = \cap_{\alpha\in\mathcal{R}} H_\alpha$ et où chaque $\mathcal{V}_j$ ($1 \leqslant j \leqslant N$) a pour seuls sous-espaces stables (sous l'action de W) $\{0\}$ et $\mathcal{V}_j$. De plus, en notant $\mathcal{R}_j = \mathcal{R} \cap \mathcal{V}_j$, alors $\mathcal{R}_j$ est un système de racines dans $\mathcal{V}_j$ qui engendre $\mathcal{V}_j$, et W s'identifie au groupe produit $\prod_{j=1}^N W_j$, où W_j est le groupe de réflexions associé à $\mathcal{R}_j$. La conséquence remarquable de ce résultat est que le noyau de Dunkl E_κ^W s'écrit alors

$$E_\kappa^W = E_\kappa^{W_0} \otimes E_\kappa^{W_1} \otimes \cdots \otimes E_\kappa^{W_N},$$

où $E_\kappa^{W_0}$ est l'exponentielle classique sur $\mathcal{V}_0$ et $E_\kappa^{W_j}$ ($1 \leqslant j \leqslant N$) est le noyau de Dunkl associé à W_j et à la restriction sur $\mathcal{R}_j$ de la fonction de multiplicité κ.

Grâce à la proposition 4.4, nous allons pouvoir énoncer et démontrer une formule produit pour le noyau de Dunkl associé à W.

Théorème 4.7. *Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. On a la formule produit suivante*

$$\begin{aligned}
&E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{d-m}} E_\kappa^W(iz, A^{-1}z')\Big(\bigotimes_{j=1}^{m} \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j} \otimes \bigotimes_{l=1}^{d-m} \mathrm{d}\delta_{(x+y)_{\beta^l}}\Big)(z'_1,\ldots,z'_d),
\end{aligned}$$

où l'on désigne par A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1^1}{\|\alpha^1\|} & \cdots & \frac{\alpha_d^1}{\|\alpha^1\|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\alpha_1^m}{\|\alpha^m\|} & \cdots & \frac{\alpha_d^m}{\|\alpha^m\|} \\ \frac{\beta_1^1}{\|\beta^1\|} & \cdots & \frac{\beta_d^1}{\|\beta^1\|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\beta_1^{d-m}}{\|\beta^{d-m}\|} & \cdots & \frac{\beta_d^{d-m}}{\|\beta^{d-m}\|} \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.8. On a donc $x_{\alpha,\beta} = Ax$. On emploiera indifféremment l'une des deux écritures (en faisant le choix qui nous semble le plus approprié).

Démonstration. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. D'après la proposition 4.4, on peut écrire

$$E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z) = E_{\overline{\kappa}^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(ix_{\alpha,\beta}, z_{\alpha,\beta})E_{\overline{\kappa}^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(iy_{\alpha,\beta}, z_{\alpha,\beta}),$$

c'est-à-dire

$$E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z) = \prod_{l=1}^{d-m} \mathrm{e}^{i(x+y)_{\beta^l}z_{\beta^l}} \prod_{j=1}^{m} E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(ix_{\alpha^j}, z_{\alpha^j})E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(iy_{\alpha^j}, z_{\alpha^j}).$$

En utilisant la formule produit unidimensionnelle (voir théorème 2.13) on obtient

$$E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z) = \prod_{j=1}^{m}\int_{\mathbb{R}} \prod_{l=1}^{d-m} \mathrm{e}^{i(x+y)_{\beta^l}z_{\beta^l}} E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(iz_{\alpha^j}, z'_j)\,\mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z'_j),$$

égalité qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{l=1}^{d-m} \mathrm{e}^{i(x+y)_{\beta^l}z_{\beta^l}} E_{\overline{\kappa}^m}^{\mathbb{Z}_2^m}\big(i(z_{\alpha^1},\ldots,z_{\alpha^m}),(z'_1,\ldots,z'_m)\big) \bigotimes_{j=1}^{m} \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z'_j). \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Or, pour tout j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant m$, on a

$$z'_j = \big(A^{-1}\big(z'_1,\ldots,z'_m,(x+y)_{\beta^1},\ldots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big)\big)_{\alpha^j}. \qquad (4.5)$$

En effet, on a par définition

$$\begin{aligned}
&\big(A^{-1}\big(z'_1,\ldots,z'_m,(x+y)_{\beta^1},\ldots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big)\big)_{\alpha^j}\\
&\qquad\qquad = \frac{\langle A^{-1}\big(z'_1,\ldots,z'_m,(x+y)_{\beta^1},\ldots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big),\alpha^j\rangle}{\|\alpha^j\|},
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&\big(A^{-1}\big(z'_1,\dots,z'_m,(x+y)_{\beta^1},\dots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big)\big)_{\alpha^j}\\&\qquad=\frac{\langle\big(z'_1,\dots,z'_m,(x+y)_{\beta^1},\dots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big),A\,\alpha^j\rangle}{\|\alpha^j\|}=z'_j,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'orthonormalité de la matrice A. De même, on peut remarquer que pour tout l vérifiant $1\leqslant l\leqslant d-m$

$$(x+y)_{\beta^l}=\big(A^{-1}\big(z'_1,\dots,z'_m,(x+y)_{\beta^1},\dots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big)\big)_{\beta^l}. \tag{4.6}$$

En utilisant (4.5) et (4.6), on peut écrire l'égalité (4.4) comme suit

$$\begin{aligned}&E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\\&=\int_{\mathbb{R}^m}E_{\overline{\kappa}^d}^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(iz_{\alpha,\beta},\big(A^{-1}\big(z'_1,\dots,z'_m,(x+y)_{\beta^1},\dots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big)\big)_{\alpha,\beta}\Big)\bigotimes_{j=1}^m\mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z'_j),\end{aligned}$$

et l'on aboutit en utilisant la proposition 4.4 à

$$\begin{aligned}&E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\\&\qquad=\int_{\mathbb{R}^m}E_\kappa^W\big(iz,A^{-1}\big(z'_1,\dots,z'_m,(x+y)_{\beta^1},\dots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big)\big)\bigotimes_{j=1}^m\mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z'_j).\end{aligned}$$

On en déduit facilement la formule souhaitée. □

Remarque 4.9. Cette formule produit ne dépend pas du choix des vecteurs β^l. C'est une simple conséquence de l'égalité (4.4), à savoir

$$\begin{aligned}&E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\\&\qquad=\int_{\mathbb{R}^m}\prod_{l=1}^{d-m}\mathrm{e}^{i(x+y)_{\beta^l}z_{\beta^l}}E_{\overline{\kappa}^m}^{\mathbb{Z}_2^m}\big(i(z_{\alpha^1},\dots,z_{\alpha^m}),(z'_1,\dots,z'_m)\big)\bigotimes_{j=1}^m\mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z'_j),\end{aligned}$$

et du fait que

$$\prod_{l=1}^{d-m}\mathrm{e}^{i(x+y)_{\beta^l}z_{\beta^l}}=\mathrm{e}^{i\langle x+y,z\rangle}\mathrm{e}^{-i\sum_{j=1}^m\frac{(x+y)_{\alpha^j}}{\|\alpha^j\|}\langle\alpha^j,z\rangle}.$$

Nous allons maintenant nous intéresser à un cas particulier de sous-système positif de racines orthogonales.

4.1.2 Un cas particulier intéressant

Considérons dans cette sous-section le cas particulier du système de racines de type $\mathcal{A}_1$, c'est-à-dire que l'on fixe dans $\mathbb{R}^2$ le système $\mathcal{R}=\{\pm(e_1-e_2)\}$, et que l'on choisit comme sous-système positif $\mathcal{R}_+=\{e_1-e_2\}$ (en prenant $\alpha_0=(2,1)$).
Ce système orthogonal est intéressant pour la raison suivante. On connaît explicitement grâce aux travaux de Baker et Forrester (voir [5, 6]) la fonction de Bessel généralisée $J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}$: c'est une fonction hypergéométrique multivariée ${}_0F_0^{(\alpha)}$ à deux arguments, et l'on sait d'après Lassalle ([32]) que celle-ci s'exprime en dimension 2 au moyen de polynômes

de Gegenbauer. Par conséquent, en utilisant la formule explicite du noyau de Dunkl dans le cas $\mathcal{A}_1$ (cas particulier de la proposition 4.4), nous allons pouvoir donner une expression des fonctions de Bessel normalisées au moyen d'un développement en polynômes de Gegenbauer.
Même si nous n'allons nous intéresser qu'au seul cas de la dimension deux et à la fonction ${}_0F_0^{(\alpha)}$, nous introduisons les notions de polynôme de Jack et de fonction hypergéométrique multivariée en toute généralité. Pour cela, il faudra au préalable définir la notion de partition.

Partitions, polynômes de Jack et fonctions hypergéométriques multivariées
Pour plus de détails, nous renvoyons principalement le lecteur au livre de Macdonald [33] pour les partitions, à l'article de Stanley [47] pour les polynômes de Jack, aux articles de Baker et Forrester [5, 6] et à l'article de Yan [61] pour les fonctions hypergéométriques multivariées.

Partitions La dimension d étant fixée, on appelle partition à au plus d parties tout d-uplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ d'entiers naturels rangés dans l'ordre décroissant, c'est-à-dire vérifiant

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_d \geqslant 0.$$

On note $\mathbb{N}^{d,P}$ l'ensemble des partitions à au plus d parties. Le nombre d'éléments $\lambda_j \neq 0$ (les éléments non nuls sont les parties de λ) s'appelle la longueur de la partition, et on note cette longueur $l(\lambda)$. Le poids de la partition, noté $|\lambda|$, est défini par

$$|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_d.$$

On identifie une partition $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ avec son diagramme

$$\big\{(j,k) : 1 \leqslant j \leqslant l(\lambda), 1 \leqslant k \leqslant \lambda_j\big\}.$$

La partition conjuguée (ou duale) λ' de $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ est le m-uplet $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ donné par

$$\lambda'_j = \#\{k : \lambda_k \geqslant j\},$$

c'est-à-dire λ'_j est le nombre de nœuds sur la j-ème colonne de λ.
On définit enfin pout tout $(j,k) \in \lambda$ la longueur-crochet supérieure h^*_λ et la longueur-crochet inférieure h_*^λ par

$$\begin{aligned} h^*_\lambda(j,k) &= \lambda'_k - j + \alpha(\lambda_j - k + 1) \\ h_*^\lambda(j,k) &= \lambda'_k - j + 1 + \alpha(\lambda_j - k) \end{aligned}$$

avec α un réel strictement positif.

On va maintenant introduire les polynômes de Jack.

Polynômes de Jack Soit $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ et soit α un réel strictement positif.
Le polynôme de Jack d'indice α (ou de paramètre de Jack α) est l'unique (à normalisation près) fonction $C_\lambda^{(\alpha)}$ homogène, symétrique et qui est fonction propre de l'opérateur

$$\sum_{j=1}^{d} x_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{2}{\alpha} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{d} \frac{x_j^2}{x_j - x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

pour la valeur propre

$$v_\lambda = \sum_{j=1}^{d} \Big(\lambda_j \Big(\lambda_j - 1 - \frac{2}{\alpha}(j-1) \Big) \Big) + \frac{2}{\alpha}|\lambda|(d-1).$$

On choisit de normaliser les polynômes de Jack de telle sorte que

$$(x_1 + \cdots + x_d)^n = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda| = n}} C_\lambda^{(\alpha)}(x).$$

L'autre normalisation classique est celle donnée par Stanley ([47]), où les polynômes de Jack $\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}$ sont choisis de telle sorte que

$$(x_1 + \cdots + x_d)^n = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda| = n}} \frac{\alpha^{|\lambda|}\, |\lambda|!}{h(\lambda)} \mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(x),$$

avec $h(\lambda)$ donné par

$$h(\lambda) = \prod_{(j,k) \in \lambda} h_\lambda^*(j,k) h_*^\lambda(j,k).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ de poids n, la relation entre les $C_\lambda^{(\alpha)}$ et les $\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}$ est donc la suivante

$$C_\lambda^{(\alpha)}(x) = \frac{\alpha^n\, n!}{h(\lambda)} \mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}. \tag{4.7}$$

Remarque 4.10. Nous ne respectons pas les notations prises par Stanley afin d'éviter des confusions avec les fonctions de Bessel normalisées et les fonctions de Bessel généralisées.

Venons-en maintenant aux fonctions hypergéométriques multivariées.

Fonctions hypergéométriques multivariées Avant de donner la définition de ces fonctions, rappelons la définition de deux objets usuels de la théorie des fonctions spéciales. Pour tout complexe z et tout entier naturel n, on notera $(z)_n$ le symbole de Pochhammer défini par

$$(z)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \prod_{j=1}^{n}(z + j - 1) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Pour tout complexe z, tout réel α strictement positif et toute partition $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$, on notera $(z)_\lambda^{(\alpha)}$ le symbole de Pochhammer généralisé défini par

$$(z)_\lambda^{(\alpha)} = \prod_{j=1}^{d} \Big(z - \frac{1}{\alpha}(j-1) \Big)_{\lambda_j}.$$

On introduit également la notation commode suivante.

Notation 4.11. Par souci de simplification, on désignera par **1** le vecteur de $\mathbb{R}^d$ $(1, \ldots, 1)$.

On peut maintenant donner la définition des fonctions hypergéométriques multivariées.

Définition 4.12. Soit p et q deux entiers naturels, soit $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ et soit α un réel strictement positif. Soit $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ des nombres complexes tels que $(b_j)_\lambda^{(\alpha)} \neq 0$ pour tout j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant q$.
La fonction hypergéométrique multivariée (à deux arguments) ${}_pF_q^{(\alpha)}$ est définie par la série

$${}_pF_q^{(\alpha)}\big(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x; y\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda|=n}} \frac{(a_1)_\lambda^{(\alpha)} \cdots (a_p)_\lambda^{(\alpha)}}{(b_1)_\lambda^{(\alpha)} \cdots (b_q)_\lambda^{(\alpha)}} \frac{C_\lambda^{(\alpha)}(x)\, C_\lambda^{(\alpha)}(y)}{|\lambda|!\, C_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1})}.$$

D'après les travaux de Baker et Forrester ([5, 6]), on sait que la fonction de Bessel généralisée est donnée dans le cas du système de racines de type $\mathcal{A}_{d-1}$ par

$$J_\kappa^{\mathfrak{S}_d}(x, y) = {}_0F_0^{(1/\kappa)}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda|=n}} \frac{C_\lambda^{(1/\kappa)}(x)\, C_\lambda^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|!\, C_\lambda^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})}, \tag{4.8}$$

et dans le cas du système de racines de type $\mathcal{B}_d$ par

$$\begin{aligned} J_\kappa^{\mathfrak{S}_d \ltimes \mathbb{Z}_2^d}(x, y) &= {}_0F_1^{(1/\kappa_2)}\left(b; \Big(\frac{x_1^2}{2}, \dots, \frac{x_d^2}{2}\Big), \Big(\frac{y_1^2}{2}, \dots, \frac{y_d^2}{2}\Big)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda|=n}} \frac{C_\lambda^{(1/\kappa_2)}\Big(\frac{x_1^2}{2}, \dots, \frac{x_d^2}{2}\Big)\, C_\lambda^{(1/\kappa_2)}\Big(\frac{y_1^2}{2}, \dots, \frac{y_d^2}{2}\Big)}{(b)_\lambda^{(1/\kappa_2)} |\lambda|!\, C_\lambda^{(1/\kappa_2)}(\mathbf{1})}, \end{aligned}$$

avec κ_1 et κ_2 les deux valeurs de la fonction de multiplicité et

$$b = \kappa_1 + (d-1)\kappa_2 + \frac{1}{2}.$$

Signalons que Demni a récemment démontré dans [13] une formule explicite dans le cas d'un système de racines de type diédral, cette formule faisant également intervenir des fonctions hypergéométriques multivariées.

Une égalité de fonctions spéciales Grâce à l'expression de la fonction de Bessel généralisée $J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}$ et à l'expression du noyau de Dunkl $E_\kappa^{\mathfrak{S}_2}$, nous allons pouvoir en déduire une expression de la fonction de Bessel normalisée d'ordre $\kappa - \frac{1}{2}$ en termes de polynômes de Gegenbauer. Avant d'être plus précis, rappelons la définition des polynômes de Gegenbauer (aussi appelés polynômes ultrasphériques). Pour une étude détaillée de ces fonctions spéciales, nous renvoyons le lecteur au livre de Andrews, Askey et Roy ([4]).

Définition 4.13. Soit $\alpha, \beta > -1$ deux réels et soit n un entier naturel. Les polynômes de Jacobi, notés $P_n^{(\alpha,\beta)}$, sont définis par

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\big).$$

On définit alors, pour tout réel $\alpha > -\frac{1}{2}$ et tout entier naturel n, les polynômes de Gegenbauer U_n^α par

$$U_n^\alpha(x) = \frac{(2\alpha)_n}{\big(\alpha + \frac{1}{2}\big)_n} P_n^{(\alpha-1/2,\alpha-1/2)}(x).$$

Remarque 4.14. Les polynômes de Gegenbauer sont traditionnellement notés C_n^α. Nous avons décidé ici de prendre une autre notation afin d'éviter d'éventuelles confusions avec les polynômes de Jack.

Écrivons à présent la formule que l'on souhaite démontrer.

Théorème 4.15. *Soit κ la valeur strictement positive de la fonction de multiplicité que l'on associe à $\mathcal{A}_1$. Soit $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x_1x_2>0, y_1y_2>0$. Notons pour tout $\lambda\in\mathbb{N}^{2,P}$*

$$c(\lambda)=h^{-1}(\lambda)\prod_{(j,k)\in\lambda}\big(2-(j-1)+\alpha(k-1)\big)=\prod_{(j,k)\in\lambda}\left(\frac{\big(2-(j-1)+\alpha(k-1)\big)}{h_\lambda^*(j,k)h_*^\lambda(j,k)}\right),$$

et notons

$$G(\lambda,\kappa,x,y)=(x_1x_2y_1y_2)^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}\,U^\kappa_{\lambda_1-\lambda_2}\Big(\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}\Big)U^\kappa_{\lambda_1-\lambda_2}\Big(\frac{y_1+y_2}{2\sqrt{y_1y_2}}\Big).$$

Alors, on a l'égalité de fonctions spéciales suivante

$$\begin{aligned}&j_{\kappa-\frac{1}{2}}\Big(\frac{i}{2}(x_1-x_2)(y_1-y_2)\Big)\\&\qquad=\mathrm{e}^{\frac{-(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{N}^{2,P}\\|\lambda|=n}}c(\lambda)\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^{|\lambda|}\Big((\lambda_1-\lambda_2)!\,(2\kappa)_{\lambda_1-\lambda_2}\Big)^2G(\lambda,\kappa,x,y).\end{aligned}$$

Pour prouver ce théorème, nous allons avoir besoin du lemme suivant qui donne une formule explicite des polynômes de Jack en dimension 2. Ce lemme n'est rien d'autre qu'une réécriture d'un résultat de Lassalle (voir [32]).

Lemme 4.16. *Soit α un réel strictement positif et soit $\lambda\in\mathbb{N}^{2,P}$. Le polynôme de Jack $C_\lambda^{(\alpha)}$ est donné pout tout $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant $x_1x_2>0$ par*

$$C_\lambda^{(\alpha)}(x)=c(\lambda)\alpha^{|\lambda|}\,|\lambda|!\,(\lambda_1-\lambda_2)!\,\Big(\frac{2}{\alpha}\Big)_{\lambda_1-\lambda_2}(x_1x_2)^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}\,U^{\frac{1}{\alpha}}_{\lambda_1-\lambda_2}\Big(\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}\Big).$$

Démonstration. Pour tout $\lambda\in\mathbb{N}^{2,P}$, on dispose, d'après l'article [32] de Lassalle, de la formule suivante

$$\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(x)=\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1})(\lambda_1-\lambda_2)!\,\Big(\frac{2}{\alpha}\Big)_{\lambda_1-\lambda_2}(x_1x_2)^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}\,U^{\frac{1}{\alpha}}_{\lambda_1-\lambda_2}\Big(\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}\Big).$$

Or, on sait d'après Stanley (voir [47]) que

$$\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1})=\prod_{(j,k)\in\lambda}\big(2-(j-1)+\alpha(k-1)\big).$$

Par conséquent

$$\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(x)=\prod_{(j,k)\in\lambda}\big(2-(j-1)+\alpha(k-1)\big)(\lambda_1-\lambda_2)!\,\Big(\frac{2}{\alpha}\Big)_{\lambda_1-\lambda_2}(x_1x_2)^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}\,U^{\frac{1}{\alpha}}_{\lambda_1-\lambda_2}\Big(\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}\Big).$$

En utilisant le lien entre les $\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}$ et les $C_\lambda^{(\alpha)}$ (égalité (4.7)), on aboutit à

$$\begin{aligned}&\frac{h(\lambda)}{\alpha^{|\lambda|}\,|\lambda|!}C_\lambda^{(\alpha)}(x)\\&=\prod_{(j,k)\in\lambda}\big(2-(j-1)+\alpha(k-1)\big)(\lambda_1-\lambda_2)!\left(\frac{2}{\alpha}\right)_{\lambda_1-\lambda_2}(x_1x_2)^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}U_{\lambda_1-\lambda_2}^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}\right),\end{aligned}$$

et le résultat s'en déduit trivialement. □

Remarque 4.17. On a en particulier

$$C_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1})=c(\lambda)\alpha^{|\lambda|}\,|\lambda|!,\tag{4.9}$$

où l'on a utilisé le résultat bien connu sur les polynômes de Gegenbauer (voir par exemple [4, page 302])

$$U_n^\alpha(1)=\frac{(2\alpha)_n}{n!}.$$

En revenant à la définition de $c(\lambda)$ et d'après l'égalité annoncée au cours de la preuve précédente

$$\prod_{(j,k)\in\lambda}\big(2-(j-1)+\alpha(k-1)\big)=\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1}),$$

on obtient

$$C_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1})=\frac{\alpha^{|\lambda|}\,|\lambda|!}{h(\lambda)}\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1}),$$

ce qui est cohérent puisque l'on retrouve l'égalité de normalisation (4.7).

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 4.15.

Démonstration. Par définition de la fonction de Bessel généralisée dans le cas $W(\mathcal{A}_1)\simeq\mathfrak{S}_2$, on a

$$J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}(x,y)=\frac{1}{2}\Big(E_\kappa^{\mathfrak{S}_2}(x,y)+E_\kappa^{\mathfrak{S}_2}\big((x_2,x_1),y\big)\Big).$$

En utilisant la formule explicite du noyau $E_\kappa^{\mathfrak{S}_2}$ (cas particulier de la proposition 4.4), on aboutit à

$$J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}(x,y)=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}}\left(E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\Big(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}},\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\Big)+E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\Big(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}},\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\Big)\right).$$

Or, on a

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\Big(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}},\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\Big)+E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\Big(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}},\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\Big)=2J_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\Big(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}},\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\Big),$$

c'est-à-dire

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\Big(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}},\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\Big)+E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\Big(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}},\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\Big)=2j_{\kappa-\frac{1}{2}}\Big(\frac{i}{2}(x_1-x_2)(y_1-y_2)\Big).$$

On peut donc affirmer que

$$J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}}j_{\kappa-\frac{1}{2}}\Big(\frac{i}{2}(x_1-x_2)(y_1-y_2)\Big).$$

D'après la formule explicite (4.8), on peut également écrire

$$J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}(x,y) = {}_0F_0^{(1/\kappa)}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{N}^{2,P}\\ |\lambda|=n}} \frac{C_\lambda^{(1/\kappa)}(x)\,C_\lambda^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|!\,C_\lambda^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})}.$$

Par conséquent

$$\mathrm{e}^{\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}} j_{\kappa-\frac{1}{2}}\Big(\frac{i}{2}(x_1-x_2)(y_1-y_2)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{N}^{2,P}\\ |\lambda|=n}} \frac{C_\lambda^{(1/\kappa)}(x)\,C_\lambda^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|!\,C_\lambda^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})}. \tag{4.10}$$

En utilisant le lemme 4.16 et l'égalité (4.9) donnée dans la remarque précédente, on obtient après simplifications

$$\frac{C_\lambda^{(1/\kappa)}(x)\,C_\lambda^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|!\,C_\lambda^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})} =$$
$$c(\lambda)\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^{|\lambda|}\Big((\lambda_1-\lambda_2)!\,(2\kappa)_{\lambda_1-\lambda_2}\Big)^2 (x_1x_2y_1y_2)^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}\, U_{\lambda_1-\lambda_2}^\kappa\Big(\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}\Big) U_{\lambda_1-\lambda_2}^\kappa\Big(\frac{y_1+y_2}{2\sqrt{y_1y_2}}\Big),$$

c'est-à-dire

$$\frac{C_\lambda^{(1/\kappa)}(x)\,C_\lambda^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|!\,C_\lambda^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})} = c(\lambda)\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^{|\lambda|}\Big((\lambda_1-\lambda_2)!\,(2\kappa)_{\lambda_1-\lambda_2}\Big)^2 G(\lambda,\kappa,x,y).$$

En utilisant cette égalité dans (4.10), cela permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}} & j_{\kappa-\frac{1}{2}}\Big(\frac{i}{2}(x_1-x_2)(y_1-y_2)\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{N}^{2,P}\\ |\lambda|=n}} c(\lambda)\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^{|\lambda|}\Big((\lambda_1-\lambda_2)!\,(2\kappa)_{\lambda_1-\lambda_2}\Big)^2 G(\lambda,\kappa,x,y),\end{aligned}$$

et le théorème est ainsi démontré. □

Revenons à présent au cas général d'un sous-système positif de racines orthogonales. Nous allons voir dans la section suivante que la formule produit du théorème 4.7 permet de démontrer que l'opérateur de translation généralisé est borné.

4.2 Translation de Dunkl

Commençons par donner la représentation intégrale de la translation de Dunkl.

Proposition 4.18. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a la représentation intégrale suivante*

$$\tau_x^{W,\kappa}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(A^{-1}z)\,\Big(\bigotimes_{j=1}^{m} \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j} \otimes \bigotimes_{l=1}^{d-m} \mathrm{d}\delta_{(x+y)_{\beta^l}}\Big)(z_1,\dots,z_d), \quad y\in\mathbb{R}^d. \tag{4.11}$$

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 2.16. □

Une fois encore, la formule ne dépend pas du choix des vecteurs β^l puisque la formule produit du noyau de Dunkl E_κ^W n'en dépend pas. La proposition précédente entraîne le caractère borné de la translation de Dunkl. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 4.19. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. La translation de Dunkl $\tau_x^{W,\kappa}$ s'étend à $L^p(\mu_\kappa^W)$ en un opérateur borné qui vérifie*

$$\|\tau_x^{W,\kappa} f\|_{W,\kappa,p} \leqslant 4^m \|f\|_{W,\kappa,p}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$. Nous allons montrer que

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f\big(A^{-1}\big(z_1, \ldots, z_m, (x+y)_{\beta^1}, \ldots, (x+y)_{\beta^{d-m}}\big)\big) \bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \in L^p(\mu_\kappa^W).$$

Pour éviter de trop longues écritures, nous noterons dans cette preuve

$$\big(z_1, \ldots, z_m, (x+y)_{\beta^1}, \ldots, (x+y)_{\beta^{d-m}}\big) = v(z, x+y).$$

On se limite au cas où $1 < p < +\infty$ (le cas $p = +\infty$ est évident, le cas $p = 1$ utilise les mêmes arguments que ceux que nous allons présenter). Soit alors q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En écrivant

$$\begin{aligned} &\Big| f\big(A^{-1} v(z, x+y)\big) \prod_{j=1}^m \mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j) \Big| \\ &\qquad = \big| f\big(A^{-1} v(z, x+y)\big)\big| \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)|^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)|^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

on obtient après application de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{\mathbb{R}^m} f\big(A^{-1} v(z, x+y)\big) \bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \Big|^p \\ &\qquad \leqslant 4^{\frac{mp}{q}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^m} \big| f\big(A^{-1} v(z, x+y)\big)\big|^p \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)| \,\mathrm{d}\mu_{\overline{\kappa}^m}^{\mathbb{Z}_2^m}(z) \bigg), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que (d'après le point *2.(b)* du théorème 2.13)

$$\bigg(\int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)| \,\mathrm{d}\mu_{\overline{\kappa}^m}^{\mathbb{Z}_2^m}(z) \bigg)^{\frac{p}{q}} \leqslant 4^{\frac{mp}{q}}.$$

En intégrant et après interversion licite, on aboutit à

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \Big| \int_{\mathbb{R}^m} f\big(A^{-1} v(z, x+y)\big) \bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \Big|^p \,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \\ &\leqslant 4^{\frac{mp}{q}} \int_{\mathbb{R}^m} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big| f\big(A^{-1} v(z, x+y)\big)\big|^p \prod_{j=1}^m \big| \mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j) \langle y, \alpha^j \rangle^{2\kappa_j} \big| \,\mathrm{d}y \bigg) \,\mathrm{d}\mu_{\overline{\kappa}^m}^{\mathbb{Z}_2^m}(z). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Or, en effectuant le changement de variable $y' = Ay$, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f\big(A^{-1}v(z,x+y)\big)\big|^p \prod_{j=1}^m \big|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)\langle y, \alpha^j\rangle^{2\kappa_j}\big|\,\mathrm{d}y = \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} \times$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f\big(A^{-1}\big(z_1,\dots,z_m, y'_{m+1}+x_{\beta^1},\dots,y'_d+x_{\beta^{d-m}}\big)\big)\big|^p \prod_{j=1}^m \big|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j){y'_j}^{2\kappa_j}\big|\,\mathrm{d}y',$$

et par invariance par translation

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f\big(A^{-1}v(z,x+y)\big)\big|^p \prod_{j=1}^m \big|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)\langle y, \alpha^j\rangle^{2\kappa_j}\big|\,\mathrm{d}y$$
$$= \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f\big(A^{-1}\big(z_1,\dots,z_m,y'_{m+1},\dots,y'_d\big)\big)\big|^p \prod_{j=1}^m \big|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j){y'_j}^{2\kappa_j}\big|\,\mathrm{d}y'.$$

Par conséquent, en revenant à l'inégalité (4.12) on a

$$4^{\frac{-mp}{q}} \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{-2\kappa_j} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f\big(A^{-1}v(z,x+y)\big) \bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}(z_j)\right|^p \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y)$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f\big(A^{-1}\big(z_1,\dots,z_m,y'_{m+1},\dots,y'_d\big)\big)\big|^p \prod_{j=1}^m \big|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j){y'_j}^{2\kappa_j}\big|\,\mathrm{d}y'\right) \mathrm{d}\mu^{\mathbb{Z}_2^m}_{\overline{\kappa}^m}(z). \tag{4.13}$$

Pour alléger les écritures, posons momentanément

$$\big(z_1,\dots,z_m,y'_{m+1},\dots,y'_d\big) = w(z, y'_{m+1,d}).$$

Puisque l'on a d'une part

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f\big(A^{-1}w(z,y'_{m+1,d})\big)\big|^p \prod_{j=1}^m \big|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j){y'_j}^{2\kappa_j}\big|\,\mathrm{d}y' =$$
$$\int_{\mathbb{R}^{d-m}} \big|f\big(A^{-1}w(z,y'_{m+1,d})\big)\big|^p \left(\int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m \big|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j){y'_j}^{2\kappa_j}\big|\,\mathrm{d}y'_1\dots\mathrm{d}y'_m\right) \mathrm{d}y'_{m+1}\dots\mathrm{d}y'_d,$$

et d'autre part (en utilisant les propriétés de symétrie de chaque $\mathcal{K}_{\kappa_j}$ et en utilisant à nouveau le point *2.(b)* du théorème 2.13)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m \big|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j){y'_j}^{2\kappa_j}\big|\,\mathrm{d}y'_1\dots\mathrm{d}y'_m \leqslant 4^m,$$

on peut affirmer en revenant à l'inégalité (4.13) que

$$4^{\frac{-mp}{q}} \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{-2\kappa_j} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f\big(A^{-1}v(z,x+y)\big) \bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}(z_j)\right|^p \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y)$$
$$\leqslant 4^m \int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{d-m}} \big|f\big(A^{-1}\big(z_1,\dots,z_m,y'_{m+1},\dots,y'_d\big)\big)\big|^p \prod_{j=1}^m |z_j|^{2\kappa_j}\,\mathrm{d}z_1\dots\mathrm{d}z_m\mathrm{d}y'_{m+1}\dots\mathrm{d}y'_d.$$

En effectuant le changement de variable

$$z' = A^{-1}\big(z_1, \dots, z_m, y'_{m+1}, \dots, y'_d\big),$$

on aboutit à

$$4^{\frac{-mp}{q}} \prod_{j=1}^{m} \|\alpha^j\|^{-2\kappa_j} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f\big(A^{-1}v(z, x+y)\big) \bigotimes_{j=1}^{m} \mathrm{d}\nu^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}(z_j) \right|^p \mathrm{d}\mu^W_\kappa(y)$$
$$\leqslant 4^m \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(z')\big|^p \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{|\langle z', \alpha^j\rangle|}{\|\alpha^j\|} \right)^{2\kappa_j} \mathrm{d}z',$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f\big(A^{-1}v(z, x+y)\big) \bigotimes_{j=1}^{m} \mathrm{d}\nu^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}(z_j) \right|^p \mathrm{d}\mu^W_\kappa(y) \leqslant 4^{m+\frac{mp}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(z')\big|^p \,\mathrm{d}\mu^W_\kappa(z').$$

Le théorème est ainsi démontré. □

Bien évidemment, on a comme conséquence immédiate du caractère borné de la translation de Dunkl le corollaire suivant concernant la convolution de Dunkl.

Corollaire 4.20. *Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ vérifiant*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Alors l'application $(f, g) \mapsto f \underset{W,\kappa}{*} g$ définie initialement sur $L^2(\mu^W_\kappa) \times L^2(\mu^W_\kappa)$ s'étend en une application continue de $L^p(\mu^W_\kappa) \times L^q(\mu^W_\kappa)$ dans $L^r(\mu^W_\kappa)$ et on a

$$\|f \underset{W,\kappa}{*} g\|_{W,\kappa,r} \leqslant c^W_\kappa 4^m \|f\|_{W,\kappa,p} \|g\|_{W,\kappa,q}.$$

On dispose donc des mêmes outils puissants que dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$. En fait, il est vraissemblable que la plupart des résultats qui ont été démontrés dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$ soit généralisable au cas où l'on considère un sous-système positif de racines deux à deux orthogonales (et dont le cas $\mathbb{Z}_2^d$ est un cas particulier). Ces deux théories sont très proches, et ce lien peut être illustré par l'égalité suivante portant sur les transformations de Dunkl

$$\mathcal{F}^W_\kappa(f)(x) = \mathcal{F}^{\mathbb{Z}_2^d}_{\overline{\kappa}^d}(f \circ A^{-1})(x_{\alpha,\beta}). \tag{4.14}$$

En effet, on peut écrire par définition

$$\mathcal{F}^W_\kappa(f)(x) = c^W_\kappa \int_{\mathbb{R}^d} E^W_\kappa(-ix, y) f(y) \prod_{j=1}^{m} |\langle y, \alpha^j\rangle|^{2\kappa_j} \,\mathrm{d}y.$$

En utilisant la formule du noyau (4.2), on obtient

$$\mathcal{F}^W_\kappa(f)(x) = c^W_\kappa \int_{\mathbb{R}^d} E^{\mathbb{Z}_2^d}_{\overline{\kappa}^d}(-ix_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) f(y) \prod_{j=1}^{m} |\langle y, \alpha^j\rangle|^{2\kappa_j} \,\mathrm{d}y,$$

et en effectuant le changement de variable $y' = Ay$ on aboutit à

$$\mathcal{F}_\kappa^W(f)(x) = \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} c_\kappa^W \int_{\mathbb{R}^d} E_{\overline{\kappa}^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(-ix_{\alpha,\beta}, y')(f\circ A^{-1})(y') \prod_{j=1}^m |y'_j|^{2\kappa_j}\,\mathrm{d}y',$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_\kappa^W(f)(x) = \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} c_\kappa^W \big(c_{\overline{\kappa}^d}^{\mathbb{Z}_2^d}\big)^{-1} \mathcal{F}_{\overline{\kappa}^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(f\circ A^{-1})(x_{\alpha,\beta}).$$

Or, un calcul rapide montre que

$$\prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} c_\kappa^W = c_{\overline{\kappa}^d}^{\mathbb{Z}_2^d},$$

et on en déduit l'égalité (4.14).

Terminons ce chapitre avec une discussion sur l'opérateur maximal M_κ^W.

4.3 Opérateur maximal de Dunkl

Commençons par donner une estimation fine de la translatée de Dunkl de χ_{B_r}. Rappelons au préalable que l'on note

$$I(x,r) =]\max\{0; |x|-r\}, |x|+r[.$$

Théorème 4.21. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $y \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$ on a*

$$|\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant C \prod_{j=1}^m \frac{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)}{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(I(x_{\alpha^j}, r))},$$

où $C = C(m,\kappa)$ est une constante indépendante de x, y, r.

Démonstration. Écrivons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $y \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$

$$\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \big(\chi_{B_r}\circ A^{-1}\big)\big(z_1,\dots,z_m,(x+y)_{\beta^1},\dots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big) \bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j).$$

Puisque la fonction χ_{B_r} est radiale, on peut alors écrire

$$\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{B_r}\big(z_1,\dots,z_m,(x+y)_{\beta^1},\dots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big) \bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j).$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 2.22, on a

$$\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{B_r}\big(z_1,\dots,z_m,(x+y)_{\beta^1},\dots,(x+y)_{\beta^{d-m}}\big) \bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j),$$

en rappelant que

$$\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa,+}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}K_\kappa(|x|,|y|,|z|)(1-\rho_{x,y,z})\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) & \text{si } x,y \neq 0 \\ \mathrm{d}\delta_x(z) & \text{si } y = 0 \\ \mathrm{d}\delta_y(z) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Puisque cette mesure est positive, on peut désormais affirmer que

$$|\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{Q_r}(z_1,\dots,z_m,(x+y)_{\beta^1},\dots,(x+y)_{\beta^{d-m}}) \bigotimes_{j=1}^m \mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j).$$

Les variables étant séparées, on en déduit que

$$|\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\,\mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j).$$

Or, pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, on a par parité de $z_j \mapsto \chi_{]-r,r[}(z_j)$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\,\mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\,\mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j),$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\,\mathrm{d}\nu_{x_{\alpha^j},y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j) = \tau_{x_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_{\alpha^j}).$$

Finalement, on a donc

$$|\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \prod_{j=1}^m \tau_{x_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_{\alpha^j}). \tag{4.15}$$

On obtient le résultat escompté en utilisant le théorème 2.23 dans l'inégalité (4.15). □

Supposons dorénavant que le sous-système positif de racines orthogonales est composé de d vecteurs $\alpha^1,\dots,\alpha^d$ et que les valeurs $\kappa_1,\dots,\kappa_d$ de la fonction de multiplicité sont strictement positives.
En utilisant l'estimation de la proposition précédente et en suivant la méthode donnée dans la preuve de la proposition 2.30, on peut construire un opérateur qui va contrôler M_κ^W. Plus précisément, notons R_α l'ensemble

$$R_\alpha(x,r) = I(x_{\alpha^1},r)\times\cdots\times I(x_{\alpha^d},r),$$

et notons M_κ^{W,R_α} l'opérateur

$$M_\kappa^{W,R_\alpha}f(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{\mu_\kappa^W(R_\alpha(x,r))}\int_{\left\{y:(|y_{\alpha^1}|,\dots,|y_{\alpha^d}|)\in R_\alpha(x,r)\right\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y).$$

On peut alors aisément prouver la proposition suivante en adaptant la preuve de la proposition 2.30.

Proposition 4.22. *Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ on a l'inégalité de contrôle suivante*

$$M_\kappa^W f(x) \leqslant C M_\kappa^{W,R_\alpha} f(x), \tag{4.16}$$

où $C = C(d,\kappa)$ est indépendante de f et de x.

Cet opérateur M_κ^{W,R_α} est bien entendu de type Hardy-Littlewood : on peut donc montrer pour M_κ^{W,R_α} (et donc pour M_κ^W grâce à l'inégalité (4.16)) un théorème maximal scalaire par des techniques de recouvrement et d'interpolation, et des inégalités de Fefferman-Stein pour M_κ^{W,R_α} (et donc pour M_κ^W grâce à l'inégalité (4.16)) en suivant la méthode du chapitre 2.

Bibliographie

[1] Chokri Abdelkefi and Mohamed Sifi. Dunkl translation and uncentered maximal operator on the real line. *Int. J. Math. Math. Sci.*, pages Art. ID 87808, 9, 2007.

[2] A. Achour and K. Trimèche. La g-fonction de Littlewood-Paley associée à un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(4) :203–226, 1983.

[3] Bechir Amri, Jean-Philippe Anker, and Mohamed Sifi. Three results in Dunkl analysis. *Colloq. Math.*, 118 :299–312, 2010.

[4] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy. *Special functions*, volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[5] T. H. Baker and P. J. Forrester. The Calogero-Sutherland model and generalized classical polynomials. *Comm. Math. Phys.*, 188(1) :175–216, 1997.

[6] T. H. Baker and P. J. Forrester. Nonsymmetric Jack polynomials and integral kernels. *Duke Math. J.*, 95(1) :1–50, 1998.

[7] Walter R. Bloom and Herbert Heyer. *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups*, volume 20 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[8] Walter R. Bloom and Zeng Fu Xu. The Hardy-Littlewood maximal function for Chébli-Trimèche hypergroups. In *Applications of hypergroups and related measure algebras (Seattle, WA, 1993)*, volume 183 of *Contemp. Math.*, pages 45–70. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[9] Walter R. Bloom and Zengfu Xu. Maximal functions on Chébli-Trimèche hypergroups. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 3(3) :403–434, 2000.

[10] Marcel de Jeu. The Dunkl transform. *Invent. Math.*, 113(1) :147–162, 1993.

[11] Marcel de Jeu. Paley-Wiener theorems for the Dunkl transform. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(10) :4225–4250 (electronic), 2006.

[12] Luc Deleaval. Fefferman-Stein inequalities for the $\mathbb{Z}_2^d$ Dunkl maximal operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 360(2) :711–726, 2009.

[13] Nizar Demni. Generalized Bessel function of type D. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 4 :Paper 075, 7, 2008.

[14] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear Operators. I. General Theory.* With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, Vol. 7. Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[15] Charles F. Dunkl. The measure algebra of a locally compact hypergroup. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 179 :331–348, 1973.

[16] Charles F. Dunkl. Differential-difference operators associated to reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 311(1) :167–183, 1989.

[17] Charles F. Dunkl. Operators commuting with Coxeter group actions on polynomials. In *Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988)*, volume 19 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 107–117. Springer, New York, 1990.

[18] Charles F. Dunkl. Integral kernels with reflection group invariance. *Canad. J. Math.*, 43(6) :1213–1227, 1991.

[19] Charles F. Dunkl. Hankel transforms associated to finite reflection groups. In *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications (Tampa, FL, 1991)*, volume 138 of *Contemp. Math.*, pages 123–138. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[20] Charles F. Dunkl. Intertwining operators associated to the group S_3. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(9) :3347–3374, 1995.

[21] Charles F. Dunkl. An intertwining operator for the group B_2. *Glasg. Math. J.*, 49(2) :291–319, 2007.

[22] Charles F. Dunkl, Marcel de Jeu, and E. M. Opdam. Singular polynomials for finite reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 346(1) :237–256, 1994.

[23] Charles F. Dunkl and Yuan Xu. *Orthogonal polynomials of several variables*, volume 81 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[24] C. Fefferman and E. M. Stein. Some maximal inequalities. *Amer. J. Math.*, 93 :107–115, 1971.

[25] Mogens Flensted-Jensen and Tom Koornwinder. The convolution structure for Jacobi function expansions. *Ark. Mat.*, 11 :245–262, 1973.

[26] Léonard Gallardo and Laurent Godefroy. Un principe d'invariance relatif à un processus généralisant le mouvement brownien N-dimensionnel. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(6) :487–492, 2004.

[27] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Math.*, 54(1) :81–116, 1930.

[28] G. J. Heckman. Dunkl operators. *Astérisque*, (245) :Exp. No. 828, 4, 223–246, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97.

[29] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[30] Robert I. Jewett. Spaces with an abstract convolution of measures. *Advances in Math.*, 18(1) :1–101, 1975.

[31] Richard Kane. *Reflection groups and invariant theory*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 5. Springer-Verlag, New York, 2001.

[32] Michel Lassalle. Polynômes de Jacobi généralisés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(6) :425–428, 1991.

[33] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[34] M. Maslouhi and E. H. Youssfi. The Dunkl intertwining operator. *J. Funct. Anal.*, 256(8) :2697–2709, 2009.

[35] Ernest Michael. Topologies on spaces of subsets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 :152–182, 1951.

[36] Adam Nowak, Luz Roncal, and Krzysztof Stempak. Riesz transforms for the Dunkl Ornstein-Uhlenbeck operator. *Colloq. Math.*, 118(2) :669–684, 2010.

[37] Adam Nowak and Krzysztof Stempak. Riesz transforms for the Dunkl harmonic oscillator. *Math. Z.*, 262(3) :539–556, 2009.

[38] E. M. Opdam. Dunkl operators, Bessel functions and the discriminant of a finite Coxeter group. *Compositio Math.*, 85(3) :333–373, 1993.

[39] Margit Rösler. Bessel-type signed hypergroups on **R**. In *Probability measures on groups and related structures, XI (Oberwolfach, 1994)*, pages 292–304. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[40] Margit Rösler. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators. *Comm. Math. Phys.*, 192(3) :519–542, 1998.

[41] Margit Rösler. Positivity of Dunkl's intertwining operator. *Duke Math. J.*, 98(3) :445–463, 1999.

[42] Margit Rösler. One-parameter semigroups related to abstract quantum models of Calogero type. In *Infinite dimensional harmonic analysis (Kyoto, 1999)*, pages 290–305. Gräbner, Altendorf, 2000.

[43] Margit Rösler. Dunkl operators : theory and applications. In *Orthogonal polynomials and special functions (Leuven, 2002)*, volume 1817 of *Lecture Notes in Math.*, pages 93–135. Springer, Berlin, 2003.

[44] Margit Rösler. A positive radial product formula for the Dunkl kernel. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(6) :2413–2438 (electronic), 2003.

[45] Margit Rösler and Michael Voit. Markov processes related with Dunkl operators. *Adv. in Appl. Math.*, 21(4) :575–643, 1998.

[46] R. Spector. Mesures invariantes sur les hypergroupes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 239 :147–165, 1978.

[47] Richard P. Stanley. Some combinatorial properties of Jack symmetric functions. *Adv. Math.*, 77(1) :76–115, 1989.

[48] E. M. Stein and J.-O. Strömberg. Behavior of maximal functions in $\mathbf{R}^n$ for large n. *Ark. Mat.*, 21(2) :259–269, 1983.

[49] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[50] Elias M. Stein. *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory.* Annals of Mathematics Studies, No. 63. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[51] Elias M. Stein. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[52] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.

[53] Krzysztof Stempak. La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 303(1) :15–18, 1986.

[54] Jan-Olov Strömberg. Weak type L^1 estimates for maximal functions on noncompact symmetric spaces. *Ann. of Math. (2)*, 114(1) :115–126, 1981.

[55] Gábor Szegő. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Providence, R.I., third edition, 1967. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 23.

[56] Sundaram Thangavelu and Yuan Xu. Convolution operator and maximal function for the Dunkl transform. *J. Anal. Math.*, 97 :25–55, 2005.

[57] Khalifa Trimèche. Paley-Wiener theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 13(1) :17–38, 2002.

[58] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reprint of the second (1944) edition.

[59] Norbert Wiener. The ergodic theorem. *Duke Math. J.*, 5(1) :1–18, 1939.

[60] Yuan Xu. Orthogonal polynomials for a family of product weight functions on the spheres. *Canad. J. Math.*, 49(1) :175–192, 1997.

[61] Zhi Min Yan. A class of generalized hypergeometric functions in several variables. *Canad. J. Math.*, 44(6) :1317–1338, 1992.

[62] Hansmartin Zeuner. One-dimensional hypergroups. *Adv. Math.*, 76(1) :1–18, 1989.

[63] A. Zygmund. *Trigonometric series. 2nd ed. Vols. I, II.* Cambridge University Press, New York, 1959.

Index des notations